

سامانه بانک تستی

FlowRax

فـ لـ

Math

@Flow_KonKour



@LoPRax_KonKour



کلیک کن وباماهمراه شو!

$$-\frac{47}{2}, -\frac{91}{4}, -22, -\frac{85}{4}, \dots \quad d = -\frac{91}{4} - \left(-\frac{47}{2}\right) = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = -\frac{47}{2} + (n-1)\left(\frac{3}{4}\right) \Rightarrow a_n = \frac{3}{4}n - \frac{97}{4}$$

$$a_n > 0 \Rightarrow \frac{3}{4}n - \frac{97}{4} > 0 \Rightarrow \frac{3}{4}n > \frac{97}{4} \Rightarrow n > \frac{97}{3} \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n \geq 33$$

پس اولین جمله مثبت این دنباله، جمله سی و سوم است و از آن جا که طبق فرض سوال این دنباله سی و هفت جمله مثبت دارد، پس آخرین جمله دنباله، جمله شصت و نهم دنباله است و داریم:

$$a_{69} = a_1 + (n-1)d = -\frac{47}{2} + 68\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{55}{2}$$

$$\text{مجموع دو جمله آخر} = a_{69} + a_{68} = \frac{55}{2} + \left(\frac{55}{2} - \frac{3}{4}\right) = \frac{217}{4}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

شماره شکل	۱	۲	۳	...
تعداد مربع های سفید	۳	۶	۹	...
تعداد مربع های رنگی	۲	۶	۱۲	...

با توجه به الگوی داده شده:

همانطور که مشخص است، الگوی مربوط به مربع های سفید، یک الگوی خطی است که اختلاف جملات در آن برابر ۳ واحد است. بنابراین، جمله عمومی این الگو برابر است با:

$$t_n = an + b \xrightarrow[t_1=3]{a=3} b=0 \Rightarrow t_n = 3n$$

از طرفی، می توان ثابت کرد که الگوی مربوط به مربع های رنگی، یک الگوی درجه دوم است. به عبارتی:

$$\begin{array}{c} 2 \quad 6 \quad 12 \\ \quad \swarrow \quad \searrow \\ \quad 4 \quad 6 \\ \quad \quad \swarrow \quad \searrow \\ \quad \quad 2 \end{array}$$

پس جمله عمومی این الگو نیز به فرم $t_n = \frac{a}{2}n^2 + bn + c$ است، که در آن a همان اختلاف اختلاف جملات در الگوی فوق (یعنی ۲) است و برای یافتن ضرایب b و c داریم:

$$\left\{ t_n = n^2 + bn + c \xrightarrow[t_2=6]{t_1=2} \begin{cases} 2 = 1 + b + c \rightarrow b + c = 1 \\ 6 = 4 + 2b + c \rightarrow 2b + c = 2 \end{cases} \right\} \Rightarrow b = 1, c = 0$$

بنابراین، جمله عمومی الگوی درجه دوم به فرم $t_n = n^2 + n$ است. در نتیجه برای پیدا کردن شماره شکل مورد نظر:

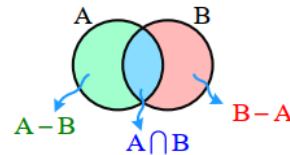
$$\frac{\text{تعداد مربع های رنگی}}{\text{تعداد مربع های سفید}} = 12 \Rightarrow \frac{n^2 + n}{3n} = 12 \Rightarrow \frac{n(n+1)}{3n} = 12 \xrightarrow{n \neq 0} \frac{n+1}{3} = 12 \Rightarrow n = 35$$

بنابراین در شکل شماره ۳۵م نسبت تعداد مربع های رنگی به تعداد مربع های سفید برابر ۱۲ است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳

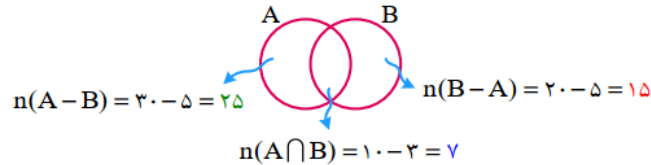
اجتماع دو مجموعه را می‌توان به شکل زیر نوشت:



$$\underbrace{n(A \cup B)}_{60} = \underbrace{n(A - B)}_{30} + \underbrace{n(B - A)}_{20} + n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 10$$

حالا طبق فرض مسئله با کم شدن ۸ عضو از هر یک از A و B، از اشتراک آن‌ها ۳ عضو کم شده و در نتیجه هر یک از $A - B$ ، $B - A$ و $A \cap B$ به ترتیب ۵، ۵ و ۳ عضو از دست داده‌اند.

یعنی اجتماع جدید $13 = 5 + 5 + 3$ عضو کمتر از اجتماع اولیه دارد، پس اجتماع جدید $47 = 60 - 13$ عضو دارد.



$$n(A \cup B) = 15 + 15 + 7 = 37$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴

در دنباله حسابی $a_n = a_1 + (n-1)d$ ، پس:

$$a_{19} = 5a_5$$

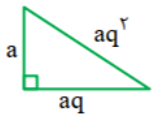
$$a_1 + 18d = 5a_1 + 20d \Rightarrow 4a_1 + 2d = 0 \Rightarrow d = -2a_1$$

حال می‌رویم سراغ حکم:

$$\frac{a_7 + a_8 + a_9}{a_7} = \frac{a_1 + 6d + a_1 + 7d + a_1 + 8d}{a_1 + 2d} = \frac{3a_1 + 21d}{a_1 + 2(-2a_1)} = \frac{3a_1 + 21(-2a_1)}{-3a_1} = \frac{-39a_1}{-3a_1} = 13$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۵

با فرض $q > 1$ ، اضلاع مثلث را a ، aq و aq^2 می‌گیریم:

$$(aq^2)^2 = (aq)^2 + a^2 \xrightarrow{+a^2} q^4 - q^2 = 1 \xrightarrow{+\frac{1}{4}} q^4 - q^2 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

$$\rightarrow (q^2 - \frac{1}{2})^2 = \frac{5}{4} \xrightarrow[\text{(q>1)}]{\text{جذر}} q^2 - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \rightarrow q^2 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

رابطه فیثاغورس می‌نویسیم:

نسبت وتر به ضلع کوچک‌تر، همان q^2 است که می‌شود: $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۶

با توجه به رابطه $(a, 2-a) \cup (1-3a, 4-4a) = (a, 4-4a)$ نتایج زیر حاصل می‌شود:

$$a \leq 1-3a < 2-a \leq 4-4a$$

$$\begin{cases} a \leq 1-3a \rightarrow a \leq \frac{1}{4} \\ 1-3a < 2-a \rightarrow a > -\frac{1}{2} \end{cases} \xrightarrow{\cap} -\frac{1}{2} < a \leq \frac{1}{4}$$

بنابراین:

$$2-a \leq 4-4a \rightarrow a \leq \frac{2}{3}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۷

الگوی تعداد مثلث‌ها در شکل n ام به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= 1 \\
 a_2 &= 1 + 2 \\
 a_3 &= 1 + 2 + 6 = 1 + (2) + (2 \times 2) \\
 a_4 &= 1 + 2 + 6 + 12 = 1 + (2) + (2 \times 2) + (2 \times 2^2) \\
 &\vdots \\
 a_{n-1} &= 1 + (2) + (2 \times 2) + (2 \times 2^2) + \dots + (2 \times 2^{n-2}) \\
 a_n &= 1 + (2) + (2 \times 2) + (2 \times 2^2) + \dots + (2 \times 2^{n-2}) + (2 \times 2^{n-1})
 \end{aligned}$$

بنابراین:

$$a_n - a_{n-1} = 2 \times 2^{n-1}$$

خواهیم داشت:

$$(a_{12} - a_{11}) + a_{\Delta} = (2 \times 2^{11}) + (1 + 2 + 6 + 12 + 24) = 2072 + 46 = 2118$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

$$\begin{aligned}
 a_n &= a + (n-1)d \quad b_n = b + (n-1)d' \\
 a_{1\Delta} = b_{\Delta 1} &\Rightarrow a + 14d = b + 5d' \\
 a_{93} = b_{39} &\Rightarrow a + 92d = b + 38d' \\
 a_{41} = a_{1\Delta} + 26d &= b_{\Delta 1} + 26(-\frac{2}{13}d') = b_{\Delta 1} - 4d' = b_{47}
 \end{aligned}$$

بنابراین:

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۸

دنباله a_n به صورت $a_n = an^2 + bn + c$ می‌باشد.

$$\begin{aligned}
 a_4 - a_3 = 11 &\Rightarrow (16a + 4b + c) - (9a + 3b + c) = 11 \Rightarrow 7a + b = 11 \\
 a_6 - a_5 = 19 &\Rightarrow (36a + 6b + c) - (25a + 5b + c) = 19 \Rightarrow 11a + b = 19 \\
 a_7 - a_6 = 23 &\Rightarrow (49a + 7b + c) - (36a + 6b + c) = 13a + b = 26 - 3 = 23
 \end{aligned}$$

بنابراین:

روش دوم:

در الگوی درجه دوم $a_n = an^2 + bn + c$ ، تفاضل جملات متوالی تشکیل الگوی خطی یا همان دنباله حسابی می‌دهند.

$$\begin{aligned}
 a_n - a_{n-1} &= b_{n-1} \\
 a_4 - a_3 = b_3 = 11 \\
 a_6 - a_5 = b_5 = 19 \\
 a_7 - a_6 = b_6 = 23
 \end{aligned}$$

بنابراین:

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

اولین جمله مشترک دو دنباله ۲۰۱ است. قدرنسبت دنباله a_n برابر ۴- و قدرنسبت دنباله b_n برابر ۱۴- است. بنابراین قدرنسبت دنباله جملات مشترک یعنی c_n برابر قرینه کوچک‌ترین مضرب مشترک قرینه قدرنسبت آن‌ها یعنی ۲۸- است.

$$c_n = 201, 173, 145, \dots$$

$$c_n = 201 + (n-1)(-28) = -28n + 229 > 0 \Rightarrow 28n < 229 \Rightarrow n < \frac{229}{28} \Rightarrow n < 8.17 \Rightarrow n \leq 8$$

این دنباله، ۸ جمله مثبت دارد.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۰

۱۱

جمله دهم دنباله برابر ۱ است.

$$a_{10} = 1 \Rightarrow a q^9 = 1$$

مکعب جمله k ام برابر جمله هفتم است.

$$\begin{aligned} a_k^3 &= a_7 \Rightarrow (a q^{k-1})^3 = a q^6 \Rightarrow a^3 q^{3k-3} = a q^6 \\ \Rightarrow a^3 q^{3k-9} &= 1 \\ a q^9 &= 1 \Rightarrow a^3 q^{27} = 1 \end{aligned} \Rightarrow 3k-9=18 \Rightarrow k=9$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۲

در دنباله ...، $\frac{9}{4}$ ، $\frac{15}{4}$ ، جمله اول ۳ و قدرنسبت $\frac{3}{4} = \frac{15}{9} - 3$ است.

$$a_n = 3 + (n-1)\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4}n + \frac{9}{4}$$

جملات a_{k-1} ، a_k و a_{k+1} زوایای مثلث برحسب درجه هستند.

$$\begin{aligned} a_{k-1} + a_k + a_{k+1} &= 180 \Rightarrow (a_k - d) + a_k + (a_k + d) = 180 \\ \Rightarrow 3a_k &= 180 \Rightarrow a_k = 60 \Rightarrow \frac{3}{4}k + \frac{9}{4} = 60 \Rightarrow \frac{3}{4}k = 60 - \frac{9}{4} = \frac{231}{4} \Rightarrow 3k = 231 \end{aligned}$$

خواهیم داشت:

$$(k-1) + k + (k+1) = 3k = 231$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۳

دنباله a_n یک دنباله هندسی است. دنباله $b_n = a_n + a$ یک دنباله حسابی است. اگر از تمامی جملات یک دنباله حسابی عدد ثابت a را کم کنیم دنباله حاصل باز هم حسابی است. بنابراین دنباله a_n حسابی است. دنباله‌ای که هم حسابی و هم هندسی باشد، یک دنباله ثابت است در نتیجه دنباله a_n و b_n هم ثابت خواهند بود.

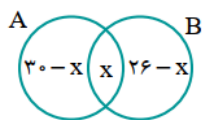
$$\begin{aligned} a_{20} &= 20 \Rightarrow a_n = 20, \quad b_{10} = 10 \Rightarrow b_n = 10 \\ b_n &= a_n + a \Rightarrow 10 = 20 + a \Rightarrow a = -10 \\ a_{15} - b_{15} &= a_{15} - (a_{15} + a) = -a = 10 \end{aligned}$$

بنابراین:

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۴

در حالت اولیه، نمودار ون به صورت مقابل است.

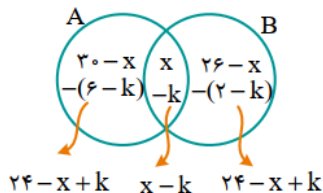
اگر از اشتراک دو مجموعه k واحد کاسته شود از $A-B$ به تعداد $6-k$ و از $B-A$ به تعداد $2-k$ عضو کم می‌شود.

$$x - k = 24 - x + k \Rightarrow 2(x - k) = 24 \Rightarrow x - k = 12$$

خواهیم داشت:

$$\Rightarrow n(A \cap B) = 12$$

$$\Rightarrow n(A - B) = n(B - A) = n(A \cap B) = 12 \Rightarrow n(A \cup B) = 3 \times 12 = 36$$



(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۵

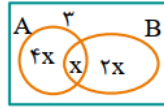
$$\frac{n(A \cup B)}{7} = \frac{n(B)}{3} = \frac{n(B-A)}{2} = x$$

$$n(A \cup B) = 7x, n(B) = 3x, n(B-A) = 2x$$

$$n(A-B) = 1 \Rightarrow 4x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

$$n(A' \cap B') = 3 \Rightarrow n(A \cup B)' = 3$$

$$n(A') = 2x + 3 = 7$$



(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۶

$$\begin{aligned} \text{دنباله هندسی: } a_1 \quad a_3 \quad a_5 \\ \text{دنباله حسابی: } b_1 \quad b_4 \quad b_6 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 = 5 \\ 5 + 3d = 5q^3 \Rightarrow 3q^3 - 5q^2 + 3 = 0 \\ 5 + 5d = 5q^5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow q^3 = \frac{3}{5} \xrightarrow{5+3d=5q^3} d = -\frac{5}{9}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۷

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{n+1} - a_n = 2n \end{cases} \xrightarrow{a_n = An^2 + Bn + C} \begin{cases} 2An + (A+B) = 2n \Rightarrow A=1, B=-1 \\ A+B+C=0 \\ 4A+2B+C=2 \end{cases} \Rightarrow a_n = n^2 - n \Rightarrow a_{100} = 9900$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

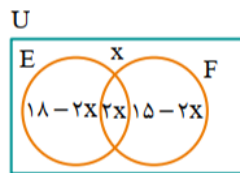
۱۸

تعداد افرادی که به هیچ زبانی مسلط نیستند را X در نظر می‌گیریم. با توجه به نمودار خواهیم داشت:

$$n(U) = x + (18-2x) + 2x + (15-2x) = 30$$

$$\Rightarrow -x + 22 = 30 \Rightarrow x = 2$$

$$n(E-F) = 18-2x = 16$$



در نتیجه:

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۹

جمله چهارم ۱۱ و جمله یازدهم ۳۲ است.

$$\left. \begin{aligned} a_4 &= a + 3d = 11 \\ a_{11} &= a + 10d = 32 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 7d = 21 \Rightarrow d = 3 \Rightarrow a = 2$$

$$\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n a_{n+1}} = \frac{d}{a_n a_{n+1}} = \frac{3}{a_n a_{n+1}} \Rightarrow \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} \right)$$

می‌دانیم:

$$\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_1 a_{11}} = \frac{1}{3} \left(\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} \right) + \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{11}} \right) \right)$$

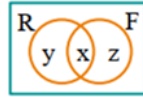
خواهیم داشت:

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{11}} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{32} \right) = \frac{1}{3} \times \frac{15}{32} = \frac{5}{32}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۰

به نمودار مقابل توجه کنید:



$$x + y = 2x = 3(56 - x - y - z) = z$$

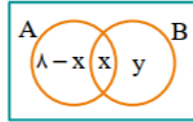
$$2x = 2y = z \Rightarrow z = 2(56 - \frac{z}{2} - \frac{z}{2} - z) \Rightarrow z = 24 \Rightarrow x = y = 12$$

تعداد افرادی که فقط به ریاضی علاقمندند برابر $y = 12$ است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۱

با توجه به نمودار خواهیم داشت:



$$n(A - B) + n(B - A) = 20 \Rightarrow 8 - x + y = 20 \Rightarrow y = x + 12$$

$$n(B) = x + y = 2x + 12$$

$$\text{می دانیم: } 0 \leq x \leq 8 \Rightarrow 12 \leq 2x + 12 \leq 28 \Rightarrow 12 \leq n(B) \leq 28$$

$$\max - \min = 28 - 12 = 16$$

بنابراین:

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۲

می دانیم:

$$a_1 + a_{19} = a_2 + a_{18} = a_3 + a_{17} = \dots = a_9 + a_{11} = 2a_{10}$$

$$S_{19} = 19a_{10} = 38$$

بنابراین:

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۳

$$\text{نکته: } n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$\text{نکته: } n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$

اگر مجموعه افرادی را که در المپیاد ریاضی شرکت کرده اند، با A و مجموعه افرادی را که در المپیاد فیزیک شرکت کرده اند، با B نشان دهیم، داریم:

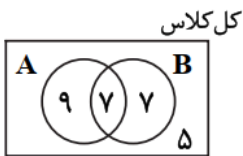
$$n(A \cup B) = 28 - 5 = 23$$

حال مطابق نکته داریم:

$$n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 23 \Rightarrow 16 + 14 - n(A \cap B) = 23 \Rightarrow 30 - n(A \cap B) = 23 \Rightarrow n(A \cap B) = 7$$

بنابراین تعداد افرادی که فقط در المپیاد ریاضی شرکت کرده اند برابر $16 - 7 = 9$ است.

نمودار ون زیر، این مجموعه ها و تعداد اعضای هر کدام از مجموعه ها را به خوبی نشان می دهد.



(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۴

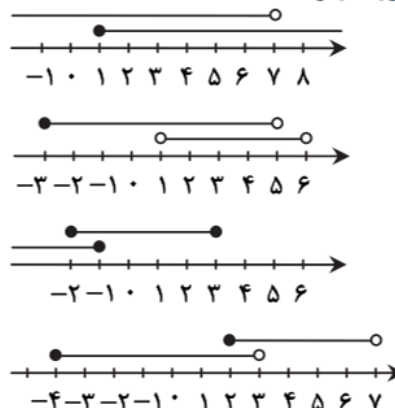
حاصل هریک از گزینه ها به صورت زیر است:

$$\text{گزینه ۱: } (-\infty, 7) \cap [1, +\infty) = [1, 7)$$

$$\text{گزینه ۲: } [-3, 5) - (1, 6) = [-3, 1]$$

$$\text{گزینه ۳: } (-\infty, -1] \cup [-2, 3] = (-\infty, 3]$$

$$\text{گزینه ۴: } [-4, 3) - [2, 7) = [-4, 2)$$



بنابراین گزینه ۲ درست است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۵ راه حل اول:

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$

ابتدا تعداد اعضای هر مجموعه را مشخص می‌کنیم:

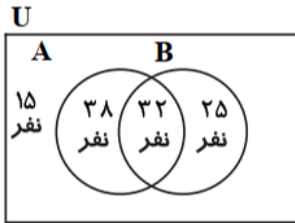
$$n(U) = 110, n(A) = 70, n(B) = 57, n(A \cap B) = 32$$

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 70 - 32 = 38$$

راه حل دوم:

ابتدا در نمودار ون تعداد اعضای هر قسمت را مشخص می‌کنیم.

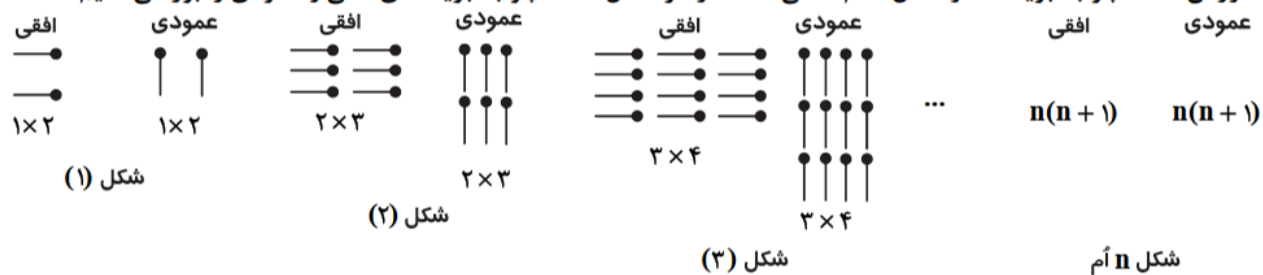
مطابق نمودار ۳۸ نفر فقط از محصول A استقبال کرده‌اند.



(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۶

برای به دست آوردن تعداد چوب‌کبریت‌ها در شکل n، کافی است در هر شکل تعداد چوب‌کبریت‌های افقی و عمودی را بررسی کنیم.



شکل n

به جدول روبه‌رو توجه کنید:

شماره شکل	۱	۲	۳	...	n
تعداد چوب‌کبریت‌ها	۴	۱۲	۲۴	...	$2n(n+1)$
تعداد مربع‌های کوچک	۱	۴	۹	...	n^2

در مرحله دهم نسبت تعداد چوب‌کبریت‌ها به تعداد مربع‌های کوچک برابر است با:

$$\frac{2 \times 10 \times 11}{10^2} = \frac{11}{5} = 2 \frac{1}{5}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۷

$$\text{نکته: } 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

نکته: جمله nام دنباله هندسی به صورت $t_n = t_1 r^{n-1}$ است که در آن t_1 جمله اول و r قدرنسبت می‌باشد. ($t_1, r \neq 0$)جملات این دنباله تشکیل دنباله هندسی با قدرنسبت $r = 3$ و جمله اول $t_1 = 3$ داده‌اند. پس حاصل ضرب بیست جمله اول عبارت است از:

$$t_1 \times t_2 \times t_3 \times \dots \times t_{20} = t_1 \times t_1 r \times t_1 r^2 \times \dots \times t_1 r^{19} = t_1^{20} \times r^{1+2+3+\dots+19} = t_1^{20} \times r^{\frac{19 \times 20}{2}} = t_1^{20} \times r^{190} = 3^{20} \times 3^{190} = 3^{210}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۸ ابتدا مجموعه‌های A و B را می‌نویسیم:

$$A = \{8, 11, 14, \dots\}$$

$$B = \left\{8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$$

هر دو مجموعه A و B نامتناهی هستند و فقط یک عضو مشترک دارند. بنابراین $A - B$ ، $B - A$ و $A \cup B$ نیز نامتناهی هستند. ولی $A \cap B = \{8\}$ یک مجموعه متناهی است. بنابراین گزینه ۴ پاسخ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۹ نکته: جمله n ام دنباله هندسی به صورت $t_n = t_1 r^{n-1}$ است که در آن t_1 جمله اول و r قدرنسبت است.

فرض می‌کنیم r قدرنسبت این دنباله هندسی باشد. داریم:

$$\frac{t_4}{t_6} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{t_1 r^3}{t_1 r^5} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{r^2} = \frac{1}{3} \Rightarrow r = \pm \sqrt{3}$$

مقدار $r = -\sqrt{3}$ قابل قبول نیست؛ زیرا طبق فرض، تمامی جملات مثبت هستند.

$$t_1 t_7 = 75 \Rightarrow t_1 \times (t_1 r^6) = 75 \Rightarrow t_1^2 \times 27 = 75 \Rightarrow t_1^2 = \frac{25}{9} \Rightarrow t_1 = \pm \frac{5}{3}$$

مقدار $t_1 = -\frac{5}{3}$ قابل قبول نیست؛ زیرا طبق فرض، تمامی جملات مثبت هستند.

بنابراین:

$$t_3 = t_1 r^2 = \frac{5}{3} (\sqrt{3})^2 = 5$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

$$1 + 2 + 3 + \dots + n - 1 + n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad n \in \mathbb{N}$$

نکته

برای رسیدن به الگویی مناسب داریم:

شماره مرحله	۱	۲	۳	...	n
نقاط توپر	۲	۳	۴	...	$n+1$
نقاط توخالی	$2(1)$	$2(1+2)$	$2(1+2+3)$	...	$2(1+2+\dots+n)$

پس تعداد نقاط توخالی در مرحله n ام برابر است با:

$$2(1+2+\dots+n) = 2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) = n(n+1) = n^2 + n$$

$$1 = (n^2 + n) - (n+1) = n^2 - 1$$

$$n^2 - 1 = 120 \Rightarrow n^2 = 121 \Rightarrow n = 11$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۱

نکته: جمله n ام یک دنباله حسابی با جمله اول t_1 و قدرنسبت d به صورت $t_n = t_1 + (n-1)d$ است.

$$t_{19} = 5t_5 \Rightarrow t_1 + 18d = 5(t_1 + 4d)$$

$$\Rightarrow -4t_1 = 2d \Rightarrow d = -2t_1$$

اکنون خواسته سؤال را به دست می آوریم:

$$\frac{t_7 + t_8 + t_9}{t_3} = \frac{t_1 + 6d + t_1 + 7d + t_1 + 8d}{t_1 + 2d} = \frac{3t_1 + 21d}{t_1 + 2d} = \frac{3t_1 + 21(-2t_1)}{t_1 + 2(-2t_1)} = \frac{-39t_1}{-3t_1} = 13$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۲

نکته: جمله n ام دنباله هندسی به صورت $t_n = t_1 r^{n-1}$ است که در آن t_1 جمله اول و r قدرنسبت می باشد ($t_1, r \neq 0$).

نکته: جمله n ام یک دنباله حسابی با جمله اول t_1 و قدرنسبت d به صورت $t_n = t_1 + (n-1)d$ است.

اگر دو واسطه درج شده x و y باشند، داریم:

$$8, x, y, 27 \Rightarrow t_1 = 8, t_4 = 27$$

$$\frac{t_4}{t_1} = \frac{27}{8} \Rightarrow \frac{t_1 r^3}{t_1} = r^3 = \frac{27}{8} \Rightarrow r = \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 8 \times \frac{3}{2} = 12 \\ y = x \times \frac{3}{2} = 18 \end{cases} \Rightarrow x + y = 30$$

در دنباله حسابی داده شده داریم:

$$t_1 = 98, d = 94 - 98 = -4$$

از طرفی باید $t_n = 30$ باشد؛ بنابراین:

$$t_n = 30 \Rightarrow t_1 + (n-1)d = 30 \Rightarrow 98 + (n-1)(-4) = 102 - 4n = 30 \Rightarrow 4n = 72 \Rightarrow n = 18$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۳

نکته (دنباله هندسی): دنباله ای است که هر جمله آن (به جز جمله اول) از ضرب جمله قبل از خودش در عددی ثابت و غیر صفر به دست می آید. این عدد ثابت را قدرنسبت دنباله می نامیم. (جمله اول هم باید غیر صفر باشد).

نکته: جمله n ام دنباله هندسی با جمله اول t_1 و قدرنسبت r به صورت $t_n = t_1 r^{n-1}$ است که $t_1, r \neq 0$.

مطابق صورت مسئله داریم:

$$I) t_7 + t_8 = 20 \Rightarrow t_1 r^6 + t_1 r^7 = 20 \Rightarrow t_1 r^6 (1 + r) = 20$$

$$II) t_9 = 8t_6 \Rightarrow t_1 r^8 = 8t_1 r^5 \Rightarrow \frac{t_1 r^8}{t_1 r^5} = 8 \Rightarrow r^3 = 8 \Rightarrow r = 2$$

با قرار دادن $r = 2$ در رابطه (I) داریم:

$$t_1(2)(1+2) = 20 \Rightarrow 10t_1 = 20 \Rightarrow t_1 = 2$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۴

نکته ۱: جمله n ام یک دنباله حسابی با جمله اول t_1 و قدرنسبت d به صورت $t_n = t_1 + (n-1)d$ است.

نکته ۲: جمله n ام یک دنباله هندسی به صورت $t_n = t_1 r^{n-1}$ است که در آن t_1 جمله اول و r قدرنسبت می باشد.

a_n دنباله ای هندسی با قدرنسبت r است، پس:

$$\frac{a_7 - a_1}{a_4 - a_1} = \frac{a_1 r^6 - a_1}{a_1 r^3 - a_1} = \frac{a_1 (r^6 - 1)}{a_1 (r^3 - 1)} = \frac{(r^3 - 1)(r^3 + 1)}{r^3 - 1} = r^3 + 1$$

همچنین b_n دنباله ای حسابی با قدرنسبت d است، پس:

$$\frac{b_7 - b_1}{b_4 - b_1} = \frac{b_1 + 6d - b_1}{b_1 + 3d - b_1} = \frac{6d}{3d} = 2$$

بنابراین مطابق رابطه داده شده داریم:

$$\frac{a_7 - a_1}{a_4 - a_1} = 14 \times \frac{b_7 - b_1}{b_4 - b_1} \Rightarrow r^3 + 1 = 14 \times 2 \Rightarrow r^3 = 27 \Rightarrow r = 3$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۵

نکته: جمله n ام دنباله هندسی به صورت $t_n = t_1 r^{n-1}$ است که در آن t_1 جمله اول و r قدرنسبت می باشد ($t_1, r \neq 0$).

$$\begin{cases} t_8 = t_1 r^7 \Rightarrow 16 = t_1 r^7 \\ t_4 = t_1 r^3 \Rightarrow 4 = t_1 r^3 \end{cases} \xrightarrow{(\div)} \frac{16}{4} = \frac{t_1 r^7}{t_1 r^3} \Rightarrow r^4 = 4 \Rightarrow r = \pm \sqrt[4]{4}$$

چون تمام جملات دنباله مثبت هستند، $r > 0$ و در نتیجه:

$$r = \sqrt[4]{4} \Rightarrow r = \sqrt{2}$$

$$t_4 = t_1 r^3 \Rightarrow 4 = t_1 \times \sqrt{2}^3 \Rightarrow t_1 = \frac{4}{\sqrt{2}^3} \Rightarrow t_1 = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{8}} = \sqrt{\frac{16}{8}} \Rightarrow t_1 = \sqrt{2}$$

اکنون می توان جمله عمومی دنباله را به دست آورد:

$$t_n = t_1 r^{n-1} \Rightarrow t_n = (\sqrt{2})(\sqrt{2})^{n-1} = (\sqrt{2})^n$$

می دانیم $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$ است، بنابراین:

$$t_n = (2^{\frac{1}{2}})^n \Rightarrow t_n = (2)^{\frac{n}{2}}$$

برای اینکه $2^{\frac{n}{2}}$ مربع کامل باشد، باید توان آن زوج باشد؛ یعنی $\frac{n}{2}$ عددی زوج است.

بنابراین n باید مضرب ۴ باشد. یعنی $n = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28\}$ ، پس در سی جمله اول دنباله، ۷ جمله مربع کامل است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

نکته: اگر a, b و c ، ۳ جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، آنگاه:

$$b^2 = ac$$

جملات دنباله حسابی را $b-d, b, b+d$ می‌نامیم، پس اعداد $b-d+5, b+10, b+d+15$ جملات متوالی یک دنباله هندسی هستند، یعنی:

$$\begin{aligned}(b+10)^2 &= (b-d+5)(b+d+15) \\ \Rightarrow b^2 + 20b + 100 &= b^2 - d^2 + 20b - 10d + 75 \\ \Rightarrow d^2 + 10d + 25 &= 0 \\ \Rightarrow (d+5)^2 &= 0 \Rightarrow d = -5\end{aligned}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

نکته: جمله n ام یک دنباله حسابی با جمله اول t_1 و قدرنسبت d به صورت $t_n = t_1 + (n-1)d$ است.

نکته: جمله n ام دنباله هندسی به صورت $t_n = t_1 r^{n-1}$ است که در آن t_1 جمله اول و r قدرنسبت است. ($t_1, r \neq 0$).

نکته: اگر a, b, c سه جمله متوالی یک دنباله حسابی باشند، آنگاه: $2b = a + c$.

نکته: اگر a, b, c سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، آنگاه: $b^2 = a \cdot c$.

با توجه به نکات بالا داریم:

$$\begin{aligned}\alpha, \beta, 2\alpha + 4 &\xrightarrow{\text{دنباله هندسی}} \beta^2 = \alpha(2\alpha + 4) \quad (1) \\ \beta - 8, \beta, 2\alpha &\xrightarrow{\text{دنباله حسابی}} 2\beta = \beta - 8 + 2\alpha \Rightarrow \beta = 2\alpha - 8 \quad (2) \\ (1), (2) &\Rightarrow (2\alpha - 8)^2 = \alpha(2\alpha + 4) \Rightarrow 4\alpha^2 - 32\alpha + 64 = 2\alpha^2 + 4\alpha \\ \Rightarrow 2\alpha^2 - 36\alpha + 64 &= 0 \Rightarrow \alpha^2 - 18\alpha + 32 = 0 \Rightarrow (\alpha - 2)(\alpha - 16) = 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \xrightarrow{(2)} \beta = -4 & \checkmark \\ \alpha = 16 \xrightarrow{(2)} \beta = 24 & \times \end{cases} \quad (\text{با توجه به فرض مسئله که } \alpha \cdot \beta < 0 \text{ است.})\end{aligned}$$

اکنون داریم:

$$\alpha = 2, \beta = -4 \Rightarrow \begin{cases} \text{دنباله هندسی: } 2, -4, 8, \dots \Rightarrow t_1 = 2, r = -2 \\ \text{دنباله حسابی: } -12, -4, 4, \dots \Rightarrow t_1 = -12, d = 8 \end{cases}$$

حال جمله دهم هر دو دنباله را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}\text{دنباله هندسی: } t_{10} &= t_1 r^9 \Rightarrow t_{10} = 2(-2)^9 = -1024 \\ \text{دنباله حسابی: } t_{10} &= t_1 + 9d \Rightarrow t_{10} = -12 + 9(8) = 60\end{aligned}$$

پس مجموع جملات دهم این دو دنباله، برابر با $-1024 + 60 = -964$ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۸

نکته: دنباله هندسی، دنباله‌ای است که در آن هر جمله (به جز جمله اول) از ضرب جمله قبل از خودش در عددی ثابت و غیرصفر به دست می‌آید. این عدد ثابت را قدرنسبت دنباله می‌نامیم ($a_1 \neq 0$).

دومین جمله بین این سه جمله از دنباله را a و قدرنسبت دنباله را r می‌نامیم. بنابراین جملات دنباله به صورت $\frac{a}{r}, a, ar$ هستند. پس داریم:

$$\frac{a}{r} \times a \times ar = \frac{1000}{27} \Rightarrow a^3 = \frac{1000}{27} \Rightarrow a = \frac{10}{3}$$

$$\frac{a}{r} + a + ar = \frac{95}{9} \Rightarrow a\left(\frac{1}{r} + 1 + r\right) = \frac{95}{9} \xrightarrow{a=\frac{10}{3}} \frac{10}{3}\left(\frac{1+r+r^2}{r}\right) = \frac{95}{9} \Rightarrow \frac{1+r+r^2}{r} = \frac{19}{6} \Rightarrow 6r^2 + 6r + 6 = 19r$$

$$\Rightarrow 6r^2 - 13r + 6 = 0 \Rightarrow r = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{12} = \frac{13 \pm 5}{12} \Rightarrow r = \frac{18}{12} \text{ یا } \frac{8}{12} \Rightarrow r = \frac{3}{2} \text{ یا } \frac{2}{3}$$

بنابراین سه جمله دنباله به صورت $5, \frac{10}{3}, \frac{20}{9}$ یا $\frac{20}{9}, \frac{10}{3}, 5$ هستند. بزرگ‌ترین این اعداد ۵ و کوچک‌ترین آن‌ها $\frac{20}{9}$ است. پس مقدار خواسته شده برابر است با:

$$\frac{5}{\frac{20}{9}} = \frac{45}{20} = 2 \frac{1}{4}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۹

نکته: جمله n ام یک دنباله حسابی با جمله اول t_1 و قدرنسبت d به صورت $t_n = t_1 + (n-1)d$ است.

فرض کنیم در دنباله حسابی $\{a_n\}$ قدرنسبت برابر d باشد. در این صورت داریم:

$$a_n = a + (n-1)d \Rightarrow \begin{cases} a_7 = a + d \\ a_8 = a + 2d \end{cases}$$

$$(a+d)^2 = a(a+2d) + 4a^2 \Rightarrow \cancel{a^2} + d^2 + 2ad = \cancel{a^2} + 2ad + 4a^2 \Rightarrow 4a^2 + 3ad - d^2 = 0$$

$$\Rightarrow (4a-d)(a+d) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -d \times (\text{جملات مثبت هستند}) \\ d = 4a \checkmark \end{cases}$$

یعنی قدرنسبت ۴ برابر جمله اول آن است، پس:

$$\frac{a_8 - a_7}{a} = \frac{(a+2d) - (a+d)}{a} = \frac{d}{a} = \frac{4a}{a} = 4$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

نکته: $(A \cup B)' = A' \cap B'$, $(A \cap B)' = A' \cup B'$

نکته: $A - B = A \cap B'$

نکته: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

اگر $n(A \cap B) = x$ باشد، با رسم نمودار ون داریم:

$$n(A) = y + x, \quad n(B) = z + x$$

با توجه به معلومات سؤال داریم:

$$n(A) - n(B) = 12 \Rightarrow (y + x) - (z + x) = 12 \Rightarrow y - z = 12 \quad (1)$$

$$n(A \cup B) - n(A \cap B) = 36 \Rightarrow (y + x + z) - x = 36 \Rightarrow y + z = 36 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow y = 24, z = 12$$

اکنون مقدار خواسته شده را به دست می آوریم:

$$3n(A' \cup B') - 2n(A' \cap B) = 3n(A \cap B') - 2n(B \cap A') = 3n(A - B) - 2n(B - A) = 3y - 2z = 3(24) - 2(12) = 48$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

نکته: الگوهایی را که جمله عمومی آن‌ها به صورت $t_n = an + b$ است، الگوهای خطی می نامیم که در آن a و b اعداد حقیقی دلخواه و ثابت هستند.

نکته: اگر a, b و c سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، آنگاه $b^2 = ac$ و b را واسطه هندسی a و b می گیریم.

t_n یک دنباله خطی است پس جمله عمومی آن به صورت $t_n = an + b$ است. بنابراین:

$$c_n = nt_n \Rightarrow c_n = n(an + b) = an^2 + bn$$

طبق فرض سؤال داریم:

$$c_4 = t_{15} \Rightarrow 16a + 4b = 15a + b \Rightarrow a = -3b \quad (1)$$

$$c_1 \cdot t_1 = 4 \Rightarrow (a+b)(a+b) = 4 \Rightarrow (a+b)^2 = 4 \xrightarrow{(1)} 4b^2 = 4 \Rightarrow b = \pm 1$$

$$\Rightarrow a = \mp 3 \xrightarrow{t_n > 0} \begin{cases} t_n = -3n + 1 \times \\ t_n = 3n - 1 \Rightarrow c_n = 3n^2 - n \end{cases}$$

اکنون واسطه هندسی t_3 و c_1 را به دست می آوریم:

$$\begin{cases} t_3 = 3(3) - 1 = 8 \\ c_1 = 3 - 1 = 2 \end{cases} \Rightarrow c_1 \text{ و } t_3 \text{ واسطه هندسی} = \sqrt{8 \times 2} = 4$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

نکته: اگر اعداد a, b و c سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، آنگاه b واسطه هندسی a و c است؛ یعنی $b^2 = ac$.

نکته: جمله n ام یک دنباله حسابی با جمله اول t_1 و قدرنسبت d ، به صورت $t_n = t_1 + (n-1)d$ است.

طبق فرض جملات $a_1 = a_1 + 8d$ و $a_4 = a_1 + 5d$ ، $a_3 = a_1 + 2d$ سه جمله متوالی یک دنباله هندسی هستند. پس با توجه به نکته بالا داریم:

$$(a_1 + 5d)^2 = (a_1 + 2d)(a_1 + 8d) \Rightarrow a_1^2 + 10a_1d + 25d^2 = a_1^2 + 10a_1d + 16d^2 \Rightarrow 9d^2 = 0 \Rightarrow d = 0$$

بنابراین اختلاف جملات یازدهم و دوازدهم در دنباله حسابی برابر صفر است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۳

نکته: جمله n ام یک دنباله حسابی با جمله اول t_1 و قدرنسبت d به صورت $t_n = t_1 + (n-1)d$ است.

نکته: اگر X, Y, Z سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، آنگاه: $Y^2 = XZ$.

نکته: در دنباله هندسی t_n با قدرنسبت r داریم: $r = \frac{t_n}{t_{n-1}}$.

در دنباله هندسی $\frac{1}{2}a_2, a_1 + a_4, 8a_6, \dots$ داریم:

$$(a_1 + a_4)^2 = \left(\frac{1}{2}a_2\right)(8a_6)$$

a_n یک دنباله حسابی است؛ بنابراین:

$$(a_1 + a_1 + 3d)^2 = 4(a_1 + d)(a_1 + 5d) \Rightarrow (2a_1 + 3d)^2 = 4(a_1 + d)(a_1 + 5d) \Rightarrow 4a_1^2 + 12a_1d + 9d^2 = 4a_1^2 + 24a_1d + 20d^2$$

$$\Rightarrow 12a_1d - 24a_1d = 20d^2 - 9d^2 \Rightarrow -12a_1d = 11d^2 \xrightarrow{d \neq 0} -12a_1 = 11d \Rightarrow d = -\frac{12}{11}a_1$$

حال قدرنسبت دنباله هندسی را به دست می آوریم:

$$r = \frac{a_1 + a_4}{\frac{1}{2}a_2} = \frac{2(2a_1 + 3d)}{a_1 + d} \Rightarrow r = \frac{2(2a_1 - \frac{36}{11}a_1)}{a_1 - \frac{12}{11}a_1} = \frac{-28a_1}{-a_1} = 28$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۴

راه حل اول:

نکته: جمله n ام یک دنباله حسابی با جمله اول t_1 و قدرنسبت d به صورت $t_n = t_1 + (n-1)d$ است.

با استفاده از جمله عمومی دنباله حسابی داریم:

$$t_1 + t_5 + t_9 + t_{13} = 72$$

$$\Rightarrow t_1 + (t_1 + 4d) + (t_1 + 8d) + (t_1 + 12d) = 72$$

$$\Rightarrow 4t_1 + 24d = 72 \Rightarrow t_1 + 6d = 18$$

$$\begin{cases} t_1 + 6d = 18 \\ t_8 = t_1 + 7d = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 36 \\ d = -3 \end{cases}$$

پس جمله ششم این دنباله برابر است با:

$$t_6 = t_1 + 5d = 36 + 5(-3) = 21$$

راه حل دوم:

در دنباله حسابی می دانیم مجموع جملات متساوی الفاصله از جمله وسط، دو برابر جمله وسط است، پس:

$$t_1 + t_{13} = t_5 + t_9 = t_6 + t_8$$

طبق فرض داریم:

$$t_1 + t_{13} + t_5 + t_9 = 72 \Rightarrow t_1 + t_{13} = 36$$

بنابراین:

$$t_6 + t_8 = 36 \xrightarrow{t_8 = 15} t_6 = 36 - 15 = 21$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۵

نکته: جمله n ام دنباله هندسی به صورت $t_n = t_1 r^{n-1}$ است که در آن t_1 جمله اول و r قدرنسبت دنباله است:

$$(t_1, r \neq 0)$$

جمله اول این دنباله هندسی (t_1) برابر $\frac{2}{27}$ و جمله هشتم (t_8) برابر -162 است، پس:

$$t_8 = t_1 r^7 \Rightarrow r^7 = \frac{-162}{\frac{2}{27}} = -81 \times 27 = -3^7 \Rightarrow r = -3$$

بنابراین حاصل ضرب آن شش واسطه برابر است با:

$$-\frac{2}{9} \times \frac{2}{3} \times (-2) \times 6 \times (-18) \times 54 = -2^6 \times 3^3 = -64 \times 27 = -1728$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۶

نکته: جمله n ام یک دنباله حسابی با جمله اول t_1 و قدرنسبت d به صورت $t_n = t_1 + (n-1)d$ است.

نکته: جمله n ام یک دنباله هندسی به صورت $t_n = t_1 r^{n-1}$ است که در آن t_1 جمله اول و r قدرنسبت دنباله است.

ابتدا با استفاده از جمله عمومی $a_n = 7 \times (-3)^{n-1}$ جمله اول و قدرنسبت این دنباله هندسی را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} a_1 = 7 \times (-3)^1 = -21 \\ a_2 = 7 \times (-3)^2 = -189 \end{cases} \Rightarrow r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{-189}{-21} = 9$$

بنابراین در دنباله حسابی b_n جمله اول برابر -21 و قدرنسبت برابر 9 است، پس:

$$b_n = b_1 + (n-1)d \Rightarrow b_n = -21 + (n-1) \times 9 \Rightarrow b_4 = -21 + 3 \times 9 \Rightarrow b_4 = 6$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۷

نکته: دنباله‌ای که هم حسابی و هم هندسی است، دنباله ثابت است که تمام جملات آن با هم برابر است؛ یعنی قدرنسبت دنباله حسابی برابر صفر و قدرنسبت دنباله هندسی برابر 1 است.

مطابق نکته تمامی جملات دنباله، برابر -3 هستند. حاصل جمع پنج جمله اول این دنباله برابر است با:

$$(-3) + (-3) + (-3) + (-3) + (-3) = 5 \times (-3) = -15$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۸

$$\left. \begin{cases} a_4 = t_2 \\ a_5 = t_3 \\ a_{22} = t_8 \end{cases} \right\} \text{جملات دنباله حسابی}$$

$$\begin{cases} a + 3d = a'q \\ a + 4d = a'q^2 \\ a + 21d = a'q^7 \end{cases} \xrightarrow{\text{کم}} \frac{a + 4d}{a + 3d} = \frac{a'q^2}{a'q} = q \Rightarrow \frac{1}{q^2} = \frac{1}{27} \Rightarrow q^2 = 27 \Rightarrow q^3 = 3^3 \Rightarrow q = 3$$

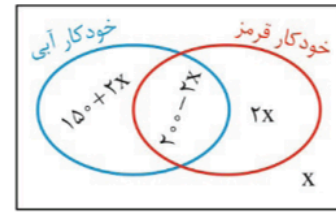
(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۹

سرنخ

به کمک نمودار ون به راحتی قابل محاسبه است.

پله اول:



x = تعداد دانش آموزانی که نه خودکار آبی و نه خودکار قرمز دارند.

$2x$ = تعداد دانش آموزانی که فقط خودکار قرمز دارند

$200 - 2x$ = تعداد دانش آموزانی که هم خودکار آبی و هم قرمز دارند.

$350 - (200 - 2x) = 150 + 2x$ = تعداد دانش آموزانی که فقط خودکار آبی دارند.

پله دوم:

$$500 = 150 + 2x + 200 - 2x + 2x + x$$

$$500 = 350 + 3x \rightarrow 3x = 150 \rightarrow x = 50$$

$2x + 150 + 2x = 150 + 4x = 150 + 4(50) = 350$ = تعداد دانش آموزانی که یک نوع خودکار دارند.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۵۰

سرنخ

جملات را به صورت $a, a+d, \dots, b-d, b$ در نظر بگیرید.

پله اول: جملات دنباله را به صورت زیر در نظر می گیریم و کوچک ترین واسطه برابر $14 + d$ و بزرگ ترین واسطه برابر $101 - d$ است،

پس:

$$\boxed{14}, 14 + d, \dots, 101 - d, \boxed{101}$$

$$\Rightarrow \underbrace{(101 - d) - (14 + d)}_{101 - 2d} = 87 \Rightarrow 2d = 6 \Rightarrow d = 3$$

پله دوم: حال مشخص می کنیم 101 چندمین جمله این دنباله است:

$$t_n = t_1 + (n-1)d \Rightarrow 101 = 14 + 3(n-1) \Rightarrow 3n = 90 \Rightarrow n = 30$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۵۱

سرنخ

با استفاده از جمله عمومی دنباله هندسی $(a_n = a_1 q^{n-1})$ ، جملات را باز کرده و پس از ساده کردن عبارتها را بر هم تقسیم کنید.

پله اول: با توجه به صورت سوال داریم:

$$\frac{a_5 + a_6 + a_7 + a_8}{a_1 + a_2 + a_3 + a_4} = \frac{144}{9} \Rightarrow \frac{a_1 q^4 + a_1 q^5 + a_1 q^6 + a_1 q^7}{a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3} = 16$$

$$\frac{a_1 q^4 (1 + q + q^2 + q^3)}{a_1 (1 + q + q^2 + q^3)} = q^4 = 16 \Rightarrow q = 2$$

$$\Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 9 \Rightarrow a_1 (1 + q + q^2 + q^3) = 9 \xrightarrow{q=2} 15a_1 = 9 \Rightarrow a_1 = \frac{3}{5}$$

پله دوم:

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

پله اول: ۵۲

$$\frac{a_3 a_{17} a_{26}}{a_{24}} = 5x - 19 \Rightarrow \frac{(a_1 q^2)(a_1 q^{16})(a_1 q^{25})}{a_1 q^{22}} = a_1^3 q^{20} = (a_1 q^{10})^2 = 5x - 19$$

$$\Rightarrow a_{11}^2 = 5x - 19$$

$$a_8 \cdot a_{14} = 3x + 3 \Rightarrow (a_1 q^7)(a_1 q^{13}) = (a_1 q^{10})^2 = 3x + 3 \Rightarrow a_{11}^2 = 3x + 3$$

پله دوم:

$$\Rightarrow 5x - 19 = 3x + 3 \Rightarrow x = 11 \Rightarrow a_{11}^2 = 3(11) + 3 = 36 \Rightarrow a_{11} = \pm 6$$

$$|a_x| = |a_{11}| = 6$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

پله اول: ۵۳

$$a_1 = t_1 \Rightarrow a = a'$$

$$a_4 = t_3 \Rightarrow a + 3d = a'q^3$$

$$a_8 = t_5 \Rightarrow a + 7d = a'q^5$$

پله دوم:

$$\Rightarrow t_1 \times t_5 = t_3^2$$

$$\Rightarrow a'(a'q^3) = (a'q^3)^2 \Rightarrow a(a + 7d) = (a + 3d)^2$$

$$\Rightarrow a^2 + 7ad = a^2 + 6ad + 9d^2 \Rightarrow 9d^2 - ad = d(9d - a) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d = 0 \rightarrow \text{دنباله ثابت و غیر قابل قبول است} \\ d = \frac{a}{9} \Rightarrow a = 9d \Rightarrow \frac{t_3}{t_1} = q^3 \Rightarrow \frac{a + 3d}{a} = q^3 \Rightarrow \frac{9d + 3d}{9d} = q^3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{12d}{9d} = q^3 \Rightarrow \frac{4}{3} = q^3 \Rightarrow q = \pm \sqrt[3]{\frac{4}{3}} \Rightarrow q = \pm \frac{2\sqrt[3]{3}}{3} \xrightarrow{\text{دنباله هندسی یکنوا}} q = \frac{2\sqrt[3]{3}}{3}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

پله اول: ۵۴

پله اول: ابتدا با استفاده از جمله عمومی دنباله، جمله اول و دوم و قدر نسبت دنباله را به دست می آوریم:

$$a_n = 2 \times 3^{n+1} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 18 \\ a_4 = 54 \end{cases} \Rightarrow r = \frac{a_4}{a_1} = \frac{54}{18} = 3$$

پله دوم: حال اگر بین دو عدد ۱۸ و ۵۴ بخواهیم n واسطه حسابی با قدر نسبت $d = r + 1 = 4$ درج کنیم، $t_1 = 18$ و $t_{n+1} = 54$ است:

$$\overbrace{18, \circ, \circ, \dots, \circ, 54}^{n \text{ واسطه حسابی}} \Rightarrow \frac{b=54}{a=18} \rightarrow d = \frac{b-a}{n+1} \rightarrow 4 = \frac{54-18}{n+1} = \frac{36}{n+1} \rightarrow n = 8$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۵۵

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = x - 1 \\ a_3 = 2x + 3 \\ a_9 = 6x + 11 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2d = x + 4 \\ 6d = 4x + 8 \end{array} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} x = 4 = d$$

پس $a_1 = 3$ و دنباله حسابی به صورت $3, 7, 11, 15, \dots$ است.

و داریم:

$$t_1 = a_7 = 7$$

$$t_7 = a_9 = 3 + 4 \times 4 = 19$$

$$t_9 = a_{10} = 3 + 9 \times 4 = 39$$

$$\text{افزایش های خطی} \quad \begin{array}{c} +12 \\ 7 \end{array} \xrightarrow{\quad} \begin{array}{c} +20 \\ 19 \end{array} \xrightarrow{\quad} \begin{array}{c} +28 \\ 39 \end{array} \xrightarrow{\quad} t_9 = 67$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

$$a_{128} = a_{64+64} = a_{64} \cdot a_{64} = 8 \rightarrow a_{64} = 2^{\frac{3}{2}}$$

$$a_{64} = a_{32+32} = a_{32} \cdot a_{32} = 2^{\frac{3}{2}} \rightarrow a_{32} = 2^{\frac{3}{4}}$$

$$a_{32} = a_{16+16} = a_{16} \cdot a_{16} = 2^{\frac{3}{4}} \rightarrow a_{16} = 2^{\frac{3}{8}}$$

به همین ترتیب می توان حدس زد $a_1 = 2^{\frac{3}{128}}$ و حاصل $\log_2 a_1$ برابر $\frac{3}{128}$ است.

۵۶

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۵۷

پله اول: جمله عمومی هر دنباله را می نویسیم و مقادیر a_7 و b_1 را پیدا می کنیم:

$$a_n = a_1 + (n-1) \times 3 \Rightarrow a_7 = a_1 + 18$$

$$b_n = b_1 + (n-1) \times 2 \Rightarrow b_1 = b_1 + 18$$

$$a_7 + b_1 = 100 \Rightarrow a_1 + 18 + b_1 + 18 = 100 \Rightarrow a_1 + b_1 = 64$$

پله دوم: با توجه به جمله عمومی مقادیر a_1 و b_7 را محاسبه می کنیم:

$$a_{10} = a_1 + 27$$

$$\Rightarrow a_{10} + b_7 = a_1 + b_1 + 39 \xrightarrow{a_1 + b_1 = 64} a_{10} + b_7 = 103$$

$$b_7 = b_1 + 12$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۵۸

سرنخ

خب بهتره که اول کار مقدارهای ممکن برای n رو پیدا کنید. بعد کافیه که بررسی کنید به ازای کدام n ها، کوچک ترین عضو گنگ و بزرگ ترین عضو گویا به دست میاد. یادتون باشه که $(\sqrt{3})^m$ به تابع صعودیه که هر وقت m زوج باشه جوابش گویا می شه....

پله اول:

$$\forall n \in W \xrightarrow{n < 4} n = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}$$

$(\sqrt{3})^{n(n+1)}$ زمانی گویاست که توان زوج باشد بنابراین بزرگ ترین عضو گویا به ازای $n = 3$ خواهد بود.

$$n = 3 \rightarrow (\sqrt{3})^{3 \times 4} = 3^6$$

و به ازای $n = \frac{1}{2}$ ، کوچک ترین عضو گنگ را خواهیم داشت:

$$n = \frac{1}{2} \rightarrow (\sqrt{3})^{n(n+1)} = (\sqrt{3})^{\frac{3}{4}} = 3^{\frac{3}{8}}$$

$$\frac{\text{کوچک ترین عضو گنگ}}{\text{بزرگ ترین عضو گویا}} = \frac{3^{\frac{3}{8}}}{3^6} = \frac{3^{\frac{3}{8}-6}}{3^6} = 3^{-\frac{45}{8}} = \frac{1}{3^{\frac{45}{8}}} = \frac{1}{27^{\frac{5}{8}}}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

$$1, 3, 6, 10, 15, \dots, \frac{n(n+1)}{2}$$

مطابق شکل تعداد مربع ها در هر شکل دارای الگوی مثلثی است.

بنابراین تعداد مربع ها در شکل بیستم برابر با $\frac{20 \times 21}{2} = 210$ است.

تعداد مربع های سفید در شکل های با شماره زوج برابر با $\left(\frac{\text{شماره شکل}}{2}\right)^2$ است، پس تعداد مربع های سفید در شکل بیستم برابر

$$\frac{\text{تعداد مربع های سفید}}{\text{تعداد کل مربع ها}} = \frac{100}{210} = \frac{10}{21}$$

است، پس نسبت خواسته شده برابر است با: $\left(\frac{20}{2}\right)^2 = 100$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

$$n(A - B) = 3n(B - A) - 2 \rightarrow n(A) - n(A \cap B) = 3(n(B) - n(A \cap B)) - 2$$

$$\rightarrow n(A) = 3n(B) - 2n(A \cap B) - 2 = 3(2n(A \cap B) + 1) - 2n(A \cap B) - 2$$

$$\rightarrow n(A) = 4n(A \cap B) + 1$$

$$n(A \cup B) = 12 \rightarrow n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 12$$

$$4n(A \cap B) + 1 + 2n(A \cap B) + 1 - n(A \cap B) = 12$$

$$5n(A \cap B) = 10 \rightarrow n(A \cap B) = 2 \rightarrow n(B) = 2(2) + 1 = 5$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۵۹

۶۰

۶۱

جمله عمومی دنباله حسابی به صورت $a_n = dn + b$ است، بنابراین در جمله عمومی داده شده باید ضریب n^2 برابر صفر باشد:

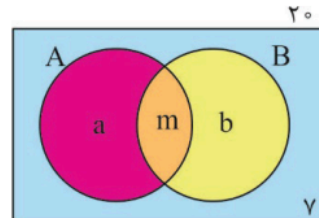
$$a_3 - 10 = 0 \rightarrow a_3 = 10 \rightarrow a_n = a_3 n - 5 \xrightarrow{n=2} a_2 = 2a_3 - 5 \rightarrow a_2 = 5$$

$$\begin{cases} a_3 = 10 \\ a_2 = 5 \end{cases} \rightarrow d = a_3 - a_2 = 5 \rightarrow a_{10} - 2a_3 = (a_3 + 7d) - 2a_3 = 7d - a_3 = 35 - 10 = 25$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۶۲

به نمودار ون توجه کنید



$$a + m + b = 20 - 7 = 13 \quad (1)$$

$$(a + m) - (m + b) = 7 \quad (2)$$

$$\Rightarrow a - b = 7 \Rightarrow b = a - 7$$

$$(1), (2) \Rightarrow a + m + a - 7 = 13$$

$$\Rightarrow 2(a + m) = 20 + m$$

$$\Rightarrow n(A) = a + m = 10 + \frac{m}{2}$$

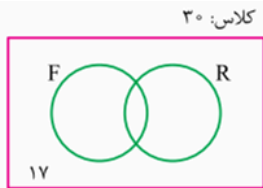
به ازای $m = 0$ حداقل $n(A)$ برابر ۱۰ است.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۶۳

پاسخ تشریحی گام اول: اعداد را در نمودار ون می نویسیم (نفرات علاقه مند به ریاضی را با R و نفرات

علاقه مند به فیزیک را با F نشان می دهیم):



$$n(R \cup F) = 30 - 17 = 13$$

گام دوم: تعداد نفرات علاقه مند به حداقل یکی از دو درس می شود:

گام سوم: اما جمع علاقه مندان ریاضی و فیزیک روی هم $11 + 8 = 19$ نفر است؛ پس ۶ نفر به هر دو درس علاقه مندند.

$$\underbrace{n(R \cup F)}_{13} = \underbrace{n(F)}_8 + \underbrace{n(R)}_{11} - \underbrace{n(R \cap F)}_{11} \Rightarrow n(R \cap F) = 19 - 13 = 6$$

به بیان دیگر:

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۶۴

پاسخ تشریحی به بررسی گزینه ها می پردازیم:

در ۱) دنبال اعداد صحیح می گردیم که تقسیم آن ها بر عدد بعدی صحیح باشد و فقط $\frac{0}{1}, \frac{-2}{-1}$ این طور هستند؛ یعنی این مجموعه دو عضو دارد و متناهی است.

در ۲) مکعب اعدادی را می خواهیم که جذرشان صحیح باشد؛ یعنی مکعب اعداد مربع کامل که نامتناهی است: $\{0^3, 1^3, 2^3, 3^3, \dots\}$

در ۳) اگر k عددی زوج باشد، $\frac{k}{1+(-1)^k}$ عددی صحیح می شود ($\frac{k}{4}$ صحیح است)؛ پس مجموعه شامل تمام اعداد صحیح زوج است که نامتناهی است.

در ۴) برای k های فرد، به $\frac{k}{4}$ می رسیم که عددی صحیح نیست؛ پس ۴ شامل تمام اعداد صحیح فرد و نامتناهی است.

تذکر دقت کنید که در ۳) برای k های فرد و در ۴) برای k های زوج کسر تعریف نمی شود.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۶۵

پاسخ تشریحی جدول روبه‌رو را ببینید:

مرحله (n)	۱	۲	۳
توپر	۳	۵	۷
خالی	۱	۳	۶

گام اول: با کمی دقت تعداد دایره‌های توپُر در مرحله n ام، الگوی خطی $2n + 1$ دارد و تعداد دایره‌های توخالی در مرحله n ام، دنبالهٔ مثلثی یعنی $\frac{n(n+1)}{2}$ است.

$$2n + 1 = 35 \Rightarrow n = \frac{35-1}{2} = 17$$

گام دوم: پس در مرحله‌ای که تعداد دایره‌های توپُر به ۳۵ می‌رسد، داریم:

$$n = 17 \Rightarrow \frac{17(18)}{2} = 17 \times 9 = 153$$

یعنی در مرحلهٔ هفده هستیم و تعداد دایره‌های توخالی برابر است با:

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۶۶

پاسخ تشریحی گام اول: الگوی خطی را $t_n = an + b$ در نظر می‌گیریم؛ پس $a_n = 2n^2 - an - b$ و داریم:

$$a_2 = t_2 \Rightarrow 2(2)^2 - 2a - b = 2a + b \xrightarrow{\text{مرتب}} 4a + 2b = 8 \quad (I)$$

$$a_5 = t_3 \Rightarrow 2(5)^2 - 5a - b = 13a + b \xrightarrow{\text{مرتب}} 18a + 2b = 50 \quad (II)$$

$$\xrightarrow{\text{عبارت (II) منهای عبارت (I)}} 14a = 42 \xrightarrow{\div 14} a = 3 \xrightarrow{\text{جای‌گذاری در (I) یا (II)}} b = -2 \quad \text{گام دوم:}$$

$$a_7 = 2(7)^2 - 3(7) + 2 = \underbrace{2 \times 49}_{98} - 21 + 2 = 100 - 21 = 79 \quad \text{گام سوم: پس داریم: } a_n = 2n^2 - 3n + 2 \text{ و در نتیجه:}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۶۷

پاسخ تشریحی گام اول: جملهٔ اول و قدرنسبت دنبالهٔ هندسی را به ترتیب a_1 و r در نظر می‌گیریم. به این ترتیب با استفاده از جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی، یعنی $a_n = a_1 r^{n-1}$ جملات دوم و چهارم دنباله به ترتیب $a_1 r$ و $a_1 r^3$ به دست می‌آیند.

گام دوم: طبق صورت سؤال $a_1, a_1 r$ و $a_1 r^3$ به ترتیب سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ حسابی غیرثابت با قدرنسبت مثبت هستند، پس دو برابر جملهٔ وسط برابر با مجموع دو جملهٔ کناری است. (واسطهٔ حسابی)

$$2a_2 = a_1 + a_4 \Rightarrow 2(a_1 r) = a_1 + a_1 r^3 \xrightarrow{\div a_1} 2r = 1 + r^3 \Rightarrow r^3 - 2r + 1 = 0 \quad (1)$$

گام سوم: معادلهٔ (۱) را حل می‌کنیم:

$$r^3 - 2r + 1 = 0 \xrightarrow{\text{دسته‌بندی}} \underbrace{(r^3 - r)}_{r(r^2-1)} - (r-1) = 0 \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} r(r-1)(r+1) - (r-1) = 0$$

$$\xrightarrow{\text{فکتورگیری}} \underbrace{(r-1)(r(r+1)-1)}_{r^2+r} = 0 \Rightarrow (r-1)(r^2+r-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} r-1=0 \Rightarrow r=1 \\ r^2+r-1=0 \end{cases}$$

گام چهارم: چون دنبالهٔ حسابی غیرثابت است، پس r نمی‌تواند یک باشد؛ ضمن این‌که طبق صورت سؤال باید $r > 0$ باشد؛ در نتیجه باید ریشهٔ مثبت معادلهٔ $r^2 + r - 1 = 0$ را به دست آوریم.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4(1)(-1) = 5$$

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow r = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \xrightarrow{r>0} r = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۶۸

تعداد والیبالیست‌ها = $n(A)$ تعداد فوتبالیست‌ها = $n(B)$ تعداد کل فوتبالیست‌ها یا والیبالیست‌ها $n(A \cup B) =$ تعداد کسانی که هم فوتبال و هم والیبال را بازی می‌کنند. $n(A \cap B) =$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$\Rightarrow 20 = n(A) + 2(n(A)) - 4 \Rightarrow 3n(A) = 24$$

$$\Rightarrow n(A) = 8$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۶۹

با توجه به مخرج، به هر جمله صورت هم ۴ تا اضافه می‌کنیم:

$$\frac{a_{21} + 4 - (a_{11} + 4)}{a_{18} + 4}$$

حالا دنباله $a_n + 4$ را b_n می‌نامیم و داریم:

$$\frac{b_{21} - b_{11}}{b_{18}}$$

$$b_{n+1} = a_{n+1} + 4 = 3a_n + 12 = 3(a_n + 4) = 3b_n$$

تعریف بازگشتی b_n را ببینید:

$$\frac{b_{21}}{b_{18}} = 3^3, \frac{b_{11}}{b_{18}} = 3$$

پس b_n دنباله هندسی با قدر نسبت ۳ است و داریم:

$$3^3 - 3 = 24$$

و جواب می‌شود:

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۷۰

اعداد مشترک دو دنباله‌ی حسابی، خود یک دنباله‌ی حسابی تشکیل می‌دهند که جمله اول آن، اولین جمله مشترک دو دنباله و قدر نسبت آن برابر با ک.م.م قدر نسبت‌های دو دنباله است. ابتدا اولین جمله مشترک دو دنباله را می‌یابیم:

$$2, 9, 16, 23, 30, 37, 44, \dots \Rightarrow t_1 = 37 \quad [7, 5] = 35 \Rightarrow d = 35 \quad \text{ک.م.م قدر نسبت‌ها}$$

$$12, 17, 22, 27, 32, 37, 42, \dots$$

$$t_n = 37 + (n-1)(35) = 35n + 2$$

بنابراین جمله عمومی جملات مشترک دو دنباله به صورت زیر است:

$$100 \leq t_n < 300 \Rightarrow 100 \leq 35n + 2 < 300$$

حال باید تعداد جملاتی از دنباله را بیابیم که سه رقمی و کوچکتر از ۳۰۰ باشند:

$$\Rightarrow \frac{98}{35} \leq n < \frac{298}{35} \Rightarrow 2/8 \leq n < 8/51 \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} 3 \leq n \leq 8 \Rightarrow \text{تعداد جملات مورد نظر} = 8 - 3 + 1 = 6$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۷۱

پاسخ تشریحی گام اول: نقطه‌های سفید، تشکیل دنباله‌ی مثلثی و نقطه‌های سیاه تشکیل دنباله‌ی مربعی می‌دهند؛ پس در مرحله n ام، تعداد

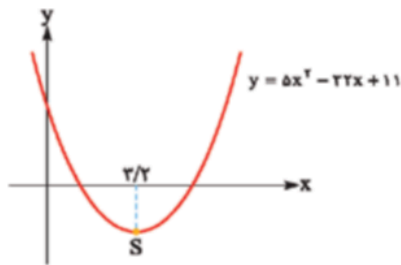
نقطه‌های سفید برابر با $\frac{n(n+1)}{2}$ و تعداد نقطه‌های سیاه برابر با n^2 است.

اختلاف آن‌ها دنباله‌ی اعداد مثبت a_n را نتیجه می‌دهد، پس:

$$a_n = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{2n^2 - n^2 - n}{2} = \frac{n^2 - n}{2} \Rightarrow 2a_n = n^2 - n \Rightarrow 2a_n = n(n-1)$$

گام دوم: هر یک از جملات دنباله‌ی $2a_n$ به صورت حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی هستند. از بین گزینه‌ها تنها $\boxed{4}$ را نمی‌توان به صورت حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی نوشت، پس این گزینه جواب مسئله است ($110 = 10 \times 11$, $30 = 5 \times 6$, $56 = 7 \times 8$).

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)



گام اول: مینیمم سهمی $y = 5x^2 - 32x + 11$ در $x_S = \frac{-b}{2a}$

$$x_S = -\frac{(-32)}{2 \times 5} = 3/2$$

پاسخ تشریحی

۷۲

اتفاق می افتد.

گام دوم: تفاوت دنباله با جمله عمومی $a_n = 5n^2 - 32n + 11$ با سهمی $y = 5x^2 - 32x + 11$ آن است که مقادیر ورودی دنباله تنها اعداد طبیعی هستند؛ پس با توجه به گام اول، اعداد طبیعی $n = 3$ و $n = 4$ را در دنباله قرار می دهیم تا کوچک ترین عضو آن به دست آید:

$$\xrightarrow{n=3} a_3 = 5(3)^2 - 32(3) + 11 = 45 - 96 + 11 = -40 \Rightarrow \text{کوچک ترین عضو دنباله}$$

$$\xrightarrow{n=4} a_4 = 5(4)^2 - 32(4) + 11 = 80 - 128 + 11 = -37$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

راه اول: گام اول: اعداد را به صورت توان های عدد ۳ می نویسیم:

پاسخ تشریحی

۷۳

$$\{3\}, \{3^2\}, \{3^3\}, \{3^4\}, \{3^5\}, \{3^6\}, \{3^7\}, \{3^8\}, \{3^9\}, \{3^{10}\}, \{3^{11}\}, \{3^{12}\}, \{3^{13}\}, \{3^{14}\}, \{3^{15}\}, \dots$$

گام دوم: اولین عدد هر دسته 3^α است، پس مقادیر α دنباله زیر را تشکیل می دهند. خواسته سؤال جمله دهم دنباله مقادیر α است.

$$\alpha \text{ دنباله: } 1, 2, 4, 7, 11, \dots$$

$$\text{اختلافها: } +1, +2, +3, +4$$

$$\text{مقدار ثابت: } +1, +1, +1$$

گام سوم: همان طور که دیده می شود، دنباله اختلاف مقادیر متوالی α ، یک دنباله حسابی با قدرنسبت ۱ است؛ پس دنباله α یک دنباله درجه دو به فرم $\alpha_n = an^2 + bn + c$ است که در آن $2a = 1$ است.

$$\text{جمله اول} = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} + b + c = 1 \Rightarrow b + c = \frac{1}{2}$$

$$\text{جمله دوم} = 2 \Rightarrow \frac{2^2}{2} + 2b + c = 2 \Rightarrow 2b + c = 0$$

$$b = -\frac{1}{2}, c = 1 \Rightarrow \alpha(n) = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} + 1$$

$$\xrightarrow{n=10} \alpha_{10} = \frac{10^2}{2} - \frac{10}{2} + 1 = 50 - 5 + 1 = 46$$

گام چهارم: خواسته سؤال α_{10} است.

راه دوم: طبق گام اول در راه حل اول، عدد آخر دسته n ام را می توان به صورت $3^{1+2+3+\dots+n}$ یا $3^{\frac{n(n+1)}{2}}$ نوشت، پس جمع ۱ تا ۹ برابر

$$45 = \frac{9 \times 10}{2} \text{ می شود؛ بنابراین آخرین عدد دسته نهم برابر } 3^{45} \text{ است، اما عدد بعدی را می خواهیم که همان } 3^{46} \text{ می باشد، پس } \alpha = 46 \text{ است.}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۷۴

پاسخ تشریحی

گام اول: مربع جملات سوم، ششم و دهم دنباله حسابی غیر ثابت ($d \neq 0$) را می نویسیم.

$$a_7, a_6, a_5 \xrightarrow{a_n = a_1 + (n-1)d} \underbrace{(a_1 + 2d)}_A, \underbrace{(a_1 + 5d)}_B, \underbrace{(a_1 + 9d)}_C \quad (1)$$

گام دوم: دنباله (۱) یک دنباله هندسی است، پس باید $B^2 = AC$ باشد.
گام سوم: از طرفین تساوی (۲) جذر می گیریم:

$$\begin{aligned} \xrightarrow{\text{جذر (۲)}} (a_1 + 5d)^2 &= \pm(a_1 + 2d)(a_1 + 9d) \Rightarrow a_1^2 + 10a_1d + 25d^2 = \pm(a_1^2 + 11a_1d + 18d^2) \\ \Rightarrow \begin{cases} a_1^2 + 10a_1d + 25d^2 = a_1^2 + 11a_1d + 18d^2 \Rightarrow 7d^2 = a_1d \xrightarrow{\div d^2} \frac{a_1}{d} = 7 \\ a_1^2 + 10a_1d + 25d^2 = -a_1^2 - 11a_1d - 18d^2 \Rightarrow 2a_1^2 + 21a_1d + 43d^2 = 0 \xrightarrow{\div d^2} 2\left(\frac{a_1}{d}\right)^2 + 21\left(\frac{a_1}{d}\right) + 43 = 0 \end{cases} \quad (3) \end{aligned}$$

گام چهارم: تا این جا یکی از جوابها $\frac{a_1}{d} = 7$ به دست آمد و به (۳) رسیدیم. معادله (۳) را نیز حل می کنیم تا جوابهای دیگر سؤال را نیز به دست آوریم.

$$\frac{a_1}{d} = \frac{-21 \pm \sqrt{21^2 - 4(2)(43)}}{4} = \frac{-21 \pm \sqrt{97}}{4}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۷۵

پاسخ تشریحی

گام اول: ابتدا جملات دنباله $t_n = 0 / 4(5)^n$ را می نویسیم.

$$0 / 4 \times 5^1, 0 / 4 \times 5^2, 0 / 4 \times 5^3, \dots$$

گام دوم: از جملات لگاریتم می گیریم تا دنباله جدید حاصل شود. $\log(0 / 4 \times 5), \log(0 / 4 \times 5^2), \log(0 / 4 \times 5^3), \dots$ (۱)

گام سوم: با استفاده از ویژگیهای لگاریتم جملات دنباله (۱) را ساده می کنیم:

$$\log 0 / 4 + \log 5, \log 0 / 4 + \log 5^2, \log 0 / 4 + \log 5^3, \dots$$

$$\Rightarrow \underbrace{\log 0 / 4 + \log 5}_{+ \log 5}, \underbrace{\log 0 / 4 + 2 \log 5}_{+ \log 5}, \log 0 / 4 + 3 \log 5, \dots$$

گام چهارم: همان طور که دیده می شود، جملات دنباله (به جز جمله اول) با افزودن $\log 5$ به جمله قبلی به دست می آید؛ بنابراین یک دنباله حسابی با قدرنسبت $d = \log 5$ و جمله اول $a_1 = \log 0 / 4 + \log 5$ داریم. خواسته سؤال را به دست می آوریم:

$$a_1 + d = \log 0 / 4 + \log 5 + \log 5 = \log(0 / 4 \times 5 \times 5) = \log 10 = 1$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۷۶

پاسخ تشریحی

گام اول: قدرنسبت دنباله هندسی را q در نظر می گیریم و جملات داده شده را بازنویسی می کنیم:

$$a_7 - a_1, a_1, a_1 + a_7 + a_7 \xrightarrow{a_n = a_1 q^n} a_1 q - a_1, a_1, a_1 + a_1 q + a_1 q^2$$

$$\Rightarrow \underbrace{a_1(q-1)}_A, \underbrace{a_1}_B, \underbrace{a_1(1+q+q^2)}_C \quad (1)$$

گام دوم: دنباله (۱)، هندسی است، پس رابطه $B^2 = AC$ برقرار است.

$$a_1^2 = a_1(q-1) \times a_1(1+q+q^2) \Rightarrow a_1^2 = a_1^2 \times (q-1)(1+q+q^2) \xrightarrow{\text{چاق و لاغر}} q^2 - 1 = 1$$

$$\Rightarrow q^2 = 2 \Rightarrow q = \sqrt{2}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

$$b_1 = 1 \times a_1 \xrightarrow{b_1=2} a_1 = 2$$

پاسخ تشریحی گام اول: با جای گذاری $n = 1$ در $b_n = na_n$ داریم:

$$b_f = a_{15} \xrightarrow{b_n = na_n \Rightarrow b_f = fa_f} fa_f = a_{15}$$

گام دوم: جمله چهارم دنباله b_n برابر جمله پانزدهم دنباله a_n است، پس:

گام سوم: طبق گفته سؤال a_n دنباله‌ای حسابی است و در گام اول دیدیم $a_1 = 2$ ، پس:

$$fa_f = a_{15} \xrightarrow{\substack{a_f = 2 + 14d \\ a_{15} = 2 + 14d}} f(2 + 14d) = 2 + 14d \Rightarrow 8 + 14d = 2 + 14d \Rightarrow 6 = 14d \Rightarrow d = 3$$

$$a_{fV} = a_1 + 46d = 140$$

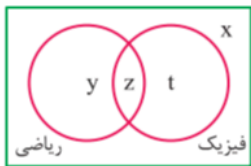
گام چهارم: واسطه هندسی بین a_{fV} و b_V همان $\sqrt{a_{fV} \times b_V}$ است، پس:

$$b_V = 7 \times a_V = 7(a_1 + 6d) = 140$$

$$\Rightarrow \sqrt{a_{fV} \times b_V} = \sqrt{140 \times 140} = 140$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

پاسخ تشریحی گام اول: طبق اطلاعات سؤال ابتدا نمودار ون زیر را رسم می‌کنیم.



y : تعداد افرادی که فقط در کلاس ریاضی شرکت می‌کنند.

t : تعداد افرادی که فقط در کلاس فیزیک شرکت می‌کنند.

z : تعداد افرادی که در هر دو کلاس شرکت می‌کنند.

x : تعداد افرادی که در هیچ‌یک از دو کلاس شرکت نمی‌کنند.

گام دوم: تعداد شرکت‌کنندگان در کلاس ریاضی ($y + z$) دو برابر تعداد شرکت‌کنندگان کلاس فیزیک ($z + t$) است؛ پس:

$$y + z = 2(z + t) \Rightarrow y = z + 2t \quad (1)$$

گام سوم: تعداد افرادی که فقط در یکی از دو کلاس شرکت کرده‌اند ($y + t$)، نصف تعداد افرادی است که در هیچ کلاسی شرکت نکرده‌اند (x)؛ پس:

$$y + t = \frac{x}{2} \Rightarrow x = 2y + 2t \quad (2)$$

گام چهارم: تعداد کل افراد ۲۵۰ است.

$$(2): x = 2y + 2t$$

$$\overbrace{x} + y + t + z = 250 \Rightarrow 3y + 3t + z = 250$$

گام پنجم: از طرفی طبق (۱)، $y = z + 2t$ است؛ پس:

$$3(z + 2t) + 3t + z = 250 \Rightarrow 9t + 4z = 250 \Rightarrow t = \frac{250 - 4z}{9}$$

گام ششم: طبق سؤال، باید مقدار z مینیمم باشد. از طرفی z و t اعداد حسابی هستند و نباید اعشاری به دست بیایند. با شروع از صفر و

مقداردهی به z برای این که t عدد حسابی باشد، به عدد $z_{\min} = 4$ می‌رسیم که به ازای آن:

$$t = \frac{250 - 4 \times 4}{9} = \frac{234}{9} = 26$$

گام هفتم: مقادیر به‌دست‌آمده برای z و t را در (۱) و سپس مقادیر به‌دست‌آمده برای y و t را در (۲) قرار می‌دهیم تا x به دست آید.

$$\xrightarrow{(1)} y = 4 + 2 \times 26 = 56$$

$$\xrightarrow{(2)} x = 2 \times 56 + 2 \times 26 = 164$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۷۹

جمله اول دنباله حسابی تشکیل شده -۱ و جمله سیزدهم آن ۳۵ است.

$$a_{13} = a + 12d \rightarrow 35 = -1 + 12d \rightarrow d = 3$$

اولین جمله درج شده، جمله دوم دنباله و آخرین جمله درج شده جمله دوازدهم دنباله است.

$$a_7 = a + d = -1 + 3 = 2 \quad a_{12} = a + 11d = -1 + 33 = 32$$

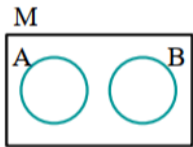
واسطه هندسی a_7 و a_{12} را k می‌نامیم.

$$k^2 = a_7 a_{12} = 2 \times 32 = 64 \rightarrow k = \pm 8$$

در دنباله حسابی فقط جمله اول منفی است. بنابراین k را ۸ در نظر می‌گیریم.

$$a_n = a + (n-1)d = 8 \rightarrow -1 + (n-1) \times 3 = 8 \rightarrow n = 4$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)



$$B - A = B$$

$$A - B = A \Rightarrow A \cap B' = A \xrightarrow{\text{دمورگان}} B \cup A' = A'$$

$$A - B = A \Rightarrow A \cap B' = A \Rightarrow A \subset B' \Rightarrow B \subset A'$$

وقتی $A - B = A$ یعنی A و B جدا از هم هستند، پس:

گزینه ۱ صحیح است، زیرا:

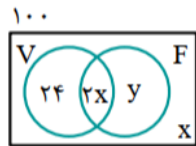
گزینه ۲ صحیح است، زیرا:

گزینه ۳ صحیح است، زیرا:

۸۰

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

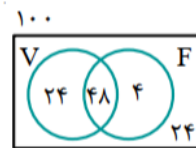
$$\begin{cases} 2x + y = 52 \\ 3x + y + 24 = 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 52 \\ 3x + y = 76 \end{cases}$$



به کمک نمودار ون، داریم:

۸۱

$$x = 24 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow$$



بنابراین ۲۴ نفر هیچ ورزشی انجام نمی‌دهند.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

$$(2^2)^{-\frac{2}{2}} \times 2^{-3n} + 2^{-3m} \times 2^{-3n} > 2^{-9}$$

$$\Rightarrow 2 \times 2^{-3n-3m} > 2^{-9} \Rightarrow 2^{-3m-3n} > 2^{-10} \Rightarrow -3m-3n > -10$$

$$\Rightarrow 3m + 3n < 10 \Rightarrow m + n < \frac{10}{3} \xrightarrow{m, n \in \mathbb{N}}$$

اولاً $m, n \in \mathbb{N}$ کافی است نامعادله را حل کنیم و داریم:

۸۲

ثانیاً حالات ممکن برابر است با:

$$\begin{array}{c|ccc} m & 1 & 2 & 3 \\ \hline n & 1 & 1 & 2 \end{array} \quad n^2 + m^2 = 2, 5, 9$$

پس ۳ عضوی است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

$$\frac{raq^2}{a^2} + \frac{aq^2}{a \cdot aq^2} = 6 \Rightarrow \frac{raq^2}{a^2} + \frac{q}{a} = 6$$

$$\frac{a_7}{a^2} = \frac{aq}{a^2} = \frac{q}{a} = t \Rightarrow 2t^2 + t - 6 = 0 \Rightarrow t = \frac{3}{2} \text{ یا } -2$$

فرض کنید $a_n = aq^{n-1}$ جمله عمومی دنباله باشد.

۸۳

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۸۴

فرض کنید جمله عمومی الگوی درجه دوم به صورت $a_n = An^2 + Bn + C$ باشد.

$$\begin{cases} a_1 = A + B + C = 1 \\ a_3 = 9A + 3B + C = 3 \\ a_5 = 25A + 5B + C = 13 \end{cases} \xrightarrow{\text{کم}} \begin{cases} 8A + 2B = 2 \\ 16A + 2B = 10 \end{cases}$$

پس $A = 1$ و $B = -3$ و $C = 3$ است و در نتیجه: $a_n = n^2 - 3n + 3$ و $a_8 = 43$.

$$\begin{cases} a = a_7 = 1 \\ b = a_7 = 7 \end{cases}$$

$$4n - 1 = 43 \Rightarrow n = 11$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۸۵

$$\text{دسته اول} = 2 \times 1$$

$$\text{دسته دوم} = 2 \times 2, 2 \times 3$$

$$\text{دسته سوم} = 2 \times 4, 2 \times 5, 2 \times 6$$

$$\text{بزرگترین عدد هر دسته} = 2 \times \frac{n^2 + n}{2} = n^2 + n$$

$$\text{کوچکترین عدد هر دسته} = 2 \times \frac{n^2 - n}{2} + 2 = n^2 - n + 2$$

$$72 \times 58 = 4176 \Rightarrow 64 - 8 + 2 = 58 \quad \text{کوچکترین عدد دسته هشتم} \quad 8^2 + 8 = 72 \quad \text{بزرگترین عدد دسته هشتم}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۸۶

نکته: اگر A و B دو مجموعه دلخواه باشند:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

با استفاده از نکته و فرض سؤال داریم:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow 24 = 3n(B) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow 24 = 4n(B) - n(A \cap B)$$

تعداد اعضای هر مجموعه عددی حسابی است و از طرفی $n(A \cap B) \leq n(B)$: با توجه به آنکه $n(A \cap B)$ حتماً مضرب ۴ است و با فرض $A \cap B \neq \emptyset$ حالات مختلف را بررسی می‌کنیم:

$$n(A \cap B) = 4 \Rightarrow n(B) = 7 \Rightarrow n(A) = 21$$

$$n(A \cap B) = 8 \Rightarrow n(B) = 8 \Rightarrow n(A) = 24$$

$$n(A \cap B) = 12 \Rightarrow n(B) = 9 \quad \text{غقیق}$$

پس فقط ۲ حالت قابل قبول است که فقط یک حالت در گزینه‌ها است.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

$$A' = \{2, 4, 6\} \rightarrow A = \{0, 1, 3, 5, 7, 8, 9, \dots\}$$

$$B' = \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow B = \{0, 6, 7, 8, \dots\}$$

$$A \cup B = \{0, 1, 3, 5, 6, 7, 8, \dots\} \rightarrow (A \cup B)' = \{2, 4\}$$

$$A' \cup B = \{0, 2, 4, 6, 7, 8, \dots\} \rightarrow (A' \cup B)' = \{1, 3, 5\}$$

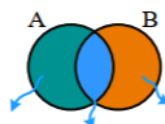
$$\rightarrow (A \cup B)' \cup (A' \cup B)' = \{1, 2, 3, 4, 5\} = B'$$

$$(A \cup B)' \cup (A' \cup B)' = (A' \cap B') \cup (A \cap B) = B' \cap \underbrace{(A' \cup A)}_U = B' \cap U = B'$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

اجتماع دو مجموعه را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\underbrace{n(A \cup B)}_{60} = \underbrace{n(A - B)}_{30} + \underbrace{n(B - A)}_{20} + n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 10$$

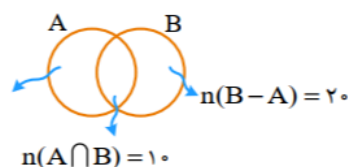


حالا طبق فرض مسئله با کم شدن ۸ عضو از هر یک از A و B، از اشتراک آن‌ها ۳ عضو کم شده و در نتیجه هر یک از $A - B$ و $B - A$ به ترتیب ۵، ۵ و ۳ عضو از دست داده‌اند.

یعنی اجتماع جدید $13 = 5 + 5 + 3$ عضو کمتر از اجتماع اولیه دارد، پس اجتماع جدید $47 = 60 - 13$ عضو دارد.

$$n(A \cup B) = 25 + 15 + 7 = 47$$

$$n(A - B) = 30 -$$



(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

مجموعه A و B رو داریم و رابطه $n(A-B) = n(A \cap B) = n(B)$ هم داره میگه برقراره. از طرفی داره میگه که $n(A \cup B)$ هم برابر ۲۱ هست یعنی تعداد اعضای اجتماع مجموعه A و B برابر ۲۱ هست.

اول از همه ببینیم از رابطه $n(A-B) = n(A \cap B) = n(B)$ چی متوجه می‌شیم؟

اگر فرض کنیم $n(A \cap B) = x$ هست و یکبار سمت چپ تساوی یعنی $3n(A - B) = 12n(A \cap B)$ و یکبار هم سمت راست تساوی یعنی

$n(A \cap B) = n(B)$ رو مورد بررسی قرار بدیم به نتایج زیر می رسیم. بینیم باهم:

$$r_n(A-B) = \frac{1}{2} r_n(A \cap B) \xrightarrow{n(A \cap B)=x} r_n(A-B) = \frac{1}{2} x \xrightarrow{\div 2} n(A-B) = \frac{1}{2} x$$

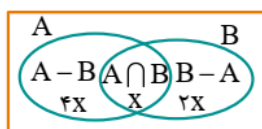
$$\text{If } n(A \cap B) = n(B) \xrightarrow{n(A \cap B) = x} \text{If } x = n(B) \xrightarrow{\div x} n(B) = x$$

طبق روابط بالا یعنی اگر تعداد اعضای مجموعه $A \cap B$ ، برابر x باشد، تعداد اعضای مجموعه B برابر $3x$ هست که با توجه به اینکه می‌دونیم $B = (B - A) \cup (B \cap A)$ هست پس $n(B) = n(B - A) + n(B \cap A)$ هست که از این جا می‌تونیم $n(B - A)$ رو به دست بیاریم.

دقت کنین ببینید چه جوری:

$$\left. \begin{array}{l} n(B) = r_x \\ n(A \cap B) = x \\ n(B) = n(B - A) + n(B \cap A) \end{array} \right\} \Rightarrow r_x = n(B - A) + x \Rightarrow n(B - A) = r_x - x = r_x$$

خب حالا نمودار ون رو رسم می‌کنیم تا روی شکل هم این موضوع رو نشون بدیم.



هم از روی شکل مشخصه هم بهتره اینو به صورت کلی بلد باشیم که $A \cup B = (A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)$

هست و بنابراین این تساوی برای تعداد اعضای اونا هم برقراره.

$$n(A \cup B) = n(A - B) + n(B - A) + n(A \cap B) \quad (*)$$

$$\left. \begin{array}{l} n(A \cup B) = 71 \\ n(A - B) = 4x \\ n(A \cap B) = x \\ n(B - A) = 2x \end{array} \right\} \Rightarrow 71 = 4x + 2x + x \Rightarrow 71 = 7x \Rightarrow x = 7$$

انہو بہترہ بلد ہاشیم ہمیشہ، انکہ $n(A) = n(A-B) + n(A \cap B)$ و $A = (A-B) \cup (A \cap B)$

$$n(A) = 5X + X = 6X = 6 \times (3) = 18$$

که البته از روی شکل هم مشخصه. پس:

بنابراین مجموعه A دارای ۱۵ عضو هست.

(ما؛ ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

$$\left. \begin{aligned} 3 &= \text{جمله اول دنباله درجه دوم} \\ 4 &= \text{جمله اول دنباله اختلافها} \\ 3 &= \text{اختلاف اختلافها} \end{aligned} \right\} \Rightarrow c = \text{جمله اول دنباله درجه دوم}$$

$$c = 3 - (4 - 3) = 3 - 1 = 2$$

پس ضریب c هم شد ۲. تا این جا دنبالمون شد $a_n = \frac{3}{2}n^2 + bn + 2$. حالا بریم سراغ ضریب b . جمله اول دنباله درجه دوممون یعنی ۳ رو جایگذاری می‌کنیم تا مجهول b رو به دست بیاریم.

$$\left. \begin{aligned} n &= 1 \\ a_1 &= 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 3 = \frac{3}{2}(1)^2 + b(1) + 2 \quad 3 = \frac{3}{2} + b + 2$$

$$3 - \frac{3}{2} - 2 = b \Rightarrow b = -\frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{3}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + 2$$

حالا مجموع ارقام جمله سی و چهارم رو می‌خوایم؛ پس اول جمله ۱۳۴ام رو به دست میاریم و به جای n ، عدد ۳۴ رو قرار میدیم.

$$a_{34} = \frac{3}{2}(34)^2 - \frac{1}{2}(34) + 2 = \frac{3}{2}(1156) - 17 + 2 = 1734 - 15 = 1719$$

که مجموع ارقام اون برابر ۱+۷+۱+۹ که میشه ۱۸ و تمام.

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

جمله عمومی دنباله حسابی، درجه اول است و ضریب n همان قدرنسبت است. پس داریم:

$$t_n = (a + 2)n^2 + bn - a, \begin{cases} a + 2 = 0 \Rightarrow a = -2 \\ \text{قدرنسبت} = b = 3 \end{cases}$$

در نتیجه جمله عمومی الگو به صورت $t_n = 3n + 2$ است و برای به دست آوردن خواسته مسئله باید نامعادله $t_n < 45$ را حل کنیم. در نتیجه می‌توان نوشت:

$$t_n < 45 \Rightarrow 3n + 2 < 45 \Rightarrow 3n < 43 \Rightarrow n < 14/3 \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} \{1, 2, \dots, 14\}$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید n ، ۱۴ مقدار می‌تواند داشته باشد.

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

$$t_1 + t_2 + t_3 = 3t_2 = 9 \Rightarrow t_2 = 3$$

$$\Rightarrow t_1 + d = 3$$

$$t_4 + t_5 + t_6 = 3t_5 = 54 \Rightarrow t_5 = 18$$

$$\Rightarrow t_1 + 4d = 18$$

جمله عمومی دنباله حسابی $t_n = t_1 + (n-1)d$ است، پس:

$$\begin{cases} t_1 + d = 3 \\ t_1 + 4d = 18 \end{cases} \Rightarrow 3d = 15 \Rightarrow d = 5$$

با حل دستگاه زیر داریم:

تذکر: دقت کنید اگر a, b, c سه جمله متوالی یک دنباله حسابی باشند، $2b = a + c$ ، پس $a + b + c = 3b$. همین‌طور بدانید که

$t_m - t_n = (m - n)d$. بنابراین با داشتن مقادیر t_2 و t_5 به طور مستقیم می‌توانستیم d را حساب کنیم:

$$t_5 - t_2 = 3d = 15 \Rightarrow d = 5$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۹۳

چون a_n دنباله خطی است پس b_n یک الگوی درجه ۲ است.

$$b_n = 2n^2 + an + b \Rightarrow \begin{cases} b_3 = 18 + 3a + b = 11 \\ b_4 = 16 + 4a + b = 137 \\ b_5 = 25 + 5a + b = -25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a + b = -7 \\ 4a + b = 121 \\ 5a + b = -50 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 2 \end{cases}$$

$$b_n = 2n^2 - 3n + 2 \Rightarrow \begin{cases} b_2 = 8 - 6 + 2 = 4 \\ b_7 = 98 - 21 + 2 = 79 \end{cases}$$

واسطه حسابی بین ۴ و ۷۹ برابر $\frac{41}{5} = \frac{82}{10}$ است.

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۹۴

اولین جمله مشترک دو دنباله ۲۰۱ است. قدرنسبت دنباله a_n برابر ۴- و قدرنسبت دنباله b_n برابر ۱۴- است. بنابراین قدرنسبت دنباله جملات مشترک یعنی c_n برابر قرینه کوچکترین مضرب مشترک قرینه قدرنسبت آنها یعنی ۲۸- است.

$$c_n = 201, 173, 145, \dots$$

$$c_n = 201 + (n-1)(-28) = -28n + 229 > 0 \Rightarrow 28n < 229 \Rightarrow n < \frac{229}{28} \Rightarrow n < 8.17 \Rightarrow n \leq 8$$
 این دنباله، ۸ جمله مثبت دارد.

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۹۵

با توجه به اطلاعات گفته شده در سوال داریم:

$$\begin{cases} a_1 - a_3 = 18 \Rightarrow aq^0 - aq^2 = 18 \Rightarrow aq^2(q^2 - 1) = 18 \\ a_1 - a_6 = 16 \Rightarrow aq^0 - aq^5 = 16 \Rightarrow aq^5(q^5 - 1) = 16 \end{cases} \xrightarrow{+} \frac{q^6 - 1}{q^3(q^3 - 1)} = \frac{18}{16}$$

$$\Rightarrow \frac{q^3 + 1}{q^3} = \frac{9}{8} \Rightarrow 8q^3 + 8 = 9q^3 \Rightarrow q^3 = 8 \Rightarrow q = 2$$

$$\Rightarrow a(2)^5(2^3 - 1) = 16 \Rightarrow a = \frac{1}{16}$$

$$a_7 = aq = \frac{1}{8}$$

بنابراین:

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۹۶

دنباله هندسی $\frac{9}{4}, -, -, -, \frac{4}{9}$ مفروض است.

$$a_1 = \frac{4}{9}$$

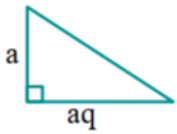
$$a_5 = \frac{9}{4} \Rightarrow aq^4 = \frac{9}{4} \Rightarrow \frac{4}{9}q^4 = \frac{9}{4} \Rightarrow q^4 = \frac{81}{16} \Rightarrow q = \pm \frac{3}{2}$$

بنابراین:

$$\begin{cases} q = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{4}{9}, \frac{2}{3}, 1, \frac{3}{2}, \frac{9}{4} \Rightarrow \frac{2}{3} + 1 + \frac{3}{2} = \frac{19}{6} \checkmark \\ q = -\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{4}{9}, -\frac{2}{3}, 1, -\frac{3}{2}, \frac{9}{4} \Rightarrow -\frac{2}{3} + 1 - \frac{3}{2} = -\frac{7}{6} \end{cases}$$

 $-\frac{7}{6}$ در گزینه‌ها نیست، پس جواب $\frac{19}{6}$ می‌باشد.

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)



با فرض $q > 1$ ، اضلاع مثلث را aq و aq^2 می‌گیریم:

$$(aq^2)^2 = (aq)^2 + a^2 \xrightarrow{+a^2} q^4 - q^2 = 1 \xrightarrow{+\frac{1}{4}} q^4 - q^2 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

رابطه فیثاغورس می‌نویسیم:

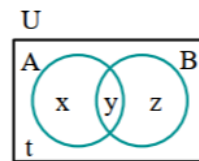
$$\rightarrow (q^2 - \frac{1}{4})^2 = \frac{5}{4} \xrightarrow[\text{جذر}]{(q>1)} q^2 - \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{5}}{2} \rightarrow q^2 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

نسبت وتر به ضلع کوچک‌تر، همان q^2 است که می‌شود: $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

روشی اول:

در نمودار ون تعداد اعضای نواحی مختلف را با t, z, y, x نمایش می‌دهیم.



$$n(A' \cap B') = 30 \Rightarrow t = 30$$

$$n(A' \cup B') = 48 \Rightarrow x + z + t = 48 \Rightarrow x + z = 18 \quad (1)$$

$$n(A) = 14 \Rightarrow x + y = 14 \quad (2)$$

$$n(B) = 12 \Rightarrow y + z = 12 \quad (3)$$

$$2(x + y + z) = 44 \Rightarrow x + y + z = 22$$

از جمع روابط (۱) و (۲) و (۳) خواهیم داشت:
بنابراین:

$$n(U) = x + y + z + t = 22 + 30 = 52$$

روشی دوم:

$$n(A' \cup B') = n(A') + n(B') - n(A' \cap B') \Rightarrow n(A') + n(B') = 48 + 30 = 78$$

$$\Rightarrow n(U) - n(A) + n(U) - n(B) = 78 \Rightarrow 2n(U) - 14 - 12 = 78 \Rightarrow n(U) = 52$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

پاسخ شریعی:

اگر تعداد پاره‌خط‌های شکل n ام را با a_n نمایش دهیم، الگوی تعداد پاره‌خط‌ها به صورت زیر است:

$$a_1 = 3$$

$$a_2 = 3 + 6 = 3 + (2 \times 3)$$

$$a_3 = 3 + 6 + (2 \times 6) = 3 + 6 + 12 = 3 + 6 + (4 \times 3)$$

$$a_4 = 3 + 6 + 12 + (2 \times 12) = 3 + 6 + 12 + 24 = 3 + 6 + 12 + (8 \times 3)$$

خواهیم داشت:

$$a_2 - a_1 = 2 \times 3$$

$$a_3 - a_2 = 4 \times 3 = 2^2 \times 3$$

$$a_4 - a_3 = 8 \times 3 = 2^3 \times 3$$

$\vdots$

$$a_{10} - a_9 = 2^9 \times 3 = 512 \times 3 = 1536$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

روشنی اول:

۱۰۰

اگر جمله اول برابر a و قدرنسبت برابر d باشد:

$$\begin{cases} t_7 + t_7 = 15 \Rightarrow a + 2d + a + 6d = 15 \\ t_4 + t_{11} = 29 \Rightarrow a + 3d + a + 10d = 29 \\ - \begin{cases} 2a + 8d = 15 \\ 2a + 7d = 29 \end{cases} \\ \hline 20d = 14 \Rightarrow d = 0.7 \Rightarrow a = 4.7 \\ t_{10} = a + 9d = 4.7 + 9 \times 0.7 = 11 \end{cases}$$

روشنی دوم:

براساس نکته‌ی آمده در درسنامه داریم:

$$\begin{aligned} t_7 + t_7 + t_4 + t_{11} &= 4t_{10} = 44 \Rightarrow t_{10} = 11 \\ 3 + 7 + 9 + 21 &= 10 + 10 + 10 + 10 = 40 \end{aligned}$$

زیرا:

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

نکته: $n(A \cup B)' = n(U) - n(A \cup B)$, $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cup B) = 12 + 10 - 3 \Rightarrow n(A \cup B) = 19$$

با استفاده از نکته داریم:

$$n(A \cup B)' = 28 - n(A \cup B) = 28 - 19 = 9$$

بنابراین می‌توان نوشت:

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

نکته: جمله n ام یک دنباله حسابی با جمله اول t_1 و قدرنسبت d ، به صورت $t_n = t_1 + (n-1)d$ است.دنباله اصلی را t_n با جمله اول t_1 و قدرنسبت d و دنباله جدید را a_n با جمله اول a_1 و قدرنسبت d' می‌نامیم. داریم:

$$a_1 = t_1 + 3, \quad d' = d + 3$$

$$a_{10} = a_1 + (10-1)d' \Rightarrow a_{10} = (t_1 + 3) + 9 \times (d + 3) \Rightarrow a_{10} = t_1 + 9d + 3 + 27 \Rightarrow a_{10} = t_{10} + 30$$

بنابراین در دنباله جدید ۳۰ واحد به جمله دهم اضافه شده است.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

راه حل اول:

۱۰۳

با توجه به جدول زیر اختلاف خواسته شده در شکل n ام برابر n است. پس این اختلاف در شکل بیستم برابر ۲۰ است.

شماره شکل	۱	۲	۳	۴	...	n
تعداد مربع رنگ شده	۱	۳	۶	۱۰	...	
تعداد مربع رنگ نشده	۰	۱	۳	۶	...	
اختلاف	۱	۲	۳	۴	...	n

راه حل دوم:

با توجه به شکل‌های داده شده، اختلاف تعداد مربع‌های رنگ شده و رنگ نشده در هر شکل برابر تعداد مربع‌های روی قطر مربع است. تعداد مربع‌های روی قطر هر مربع با شماره شکل آن برابر است. بنابراین در شکل بیستم، اختلاف تعداد مربع‌های رنگ شده و رنگ نشده برابر ۲۰ است.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۰۴

نکته: هرگاه سه جمله تشکیل یک دنباله هندسی دهند، می توان آن ها را به صورت $\frac{a}{r}, a, ar$ نمایش داد که در آن همان قدرنسبت دنباله هندسی است.

با توجه به نکته فوق می توان جملات a, b و c را به صورت $\frac{b}{r}, b, br$ در نظر گرفت. پس:

$$abc = 8 \Rightarrow \frac{b}{r} \times b \times br = 8 \Rightarrow b^3 = 8 \Rightarrow b = 2 \quad (*)$$

$$a + b + c = 6 \Rightarrow \frac{b}{r} + b + br = 6 \xrightarrow{(*)} \frac{2}{r} + 2 + 2r = 6 \Rightarrow 2 + 2r + 2r^2 = 6r \Rightarrow 2r^2 - 4r + 2 = 0$$

$$\Rightarrow r^2 - 2r + 1 = 0 \Rightarrow (r - 1)^2 = 0 \Rightarrow r = 1 \Rightarrow a = \frac{b}{r} = \frac{2}{1} = 2$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۰۵

در واقع در دنباله هندسی، ۸ جمله اول و ۲۷ جمله چهارم است و آن دو واسطه هندسی جملات دوم و سوم اند، پس:

$$8, a, b, 27 \Rightarrow 27 = 8r^3 \Rightarrow r^3 = \frac{27}{8} \Rightarrow r = \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} a = 8 \times \frac{3}{2} = 12 \\ b = 12 \times \frac{3}{2} = 18 \end{cases} \Rightarrow a + b = 30$$

از طرفی در دنباله حسابی داریم:

$$\begin{aligned} a_1 &= 98 \\ d &= -4 \Rightarrow a_n = 98 + (n-1)(-4) = -4n + 102 \end{aligned}$$

حال باید بدانیم چندمین جمله آن ۳۰ است، پس: $102 - 4n = 30$

$$4n = 72 \Rightarrow n = 18$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۰۶

a_n دنباله موردنظر است. می دانیم:

$$\begin{aligned} a_8 &= a_7^2 \Rightarrow aq^7 = (aq)^7 \Rightarrow aq^7 = a^7 q^{49} \Rightarrow a = q^7 \\ a_9 - a_7 &= 6 \Rightarrow aq^8 - aq^7 = 6 \Rightarrow a(a^7 - a) = 6 \Rightarrow a^8 - a^7 - 6 = 0 \\ &\Rightarrow (a^7 + 2)(a^7 - 3) = 0 \Rightarrow a^7 = 3 \Rightarrow a = \pm\sqrt[7]{3} \end{aligned}$$

همچنین:

چون $a = q^7$ می باشد. بنابراین $a = \sqrt[7]{3}$ قابل قبول است.

$$a_9 - a_8 = aq^8 - aq^7 = a^8 - a^7 = 9\sqrt[7]{3} - 3\sqrt[7]{3} = 6\sqrt[7]{3}$$

خواهیم داشت:

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۰۷

اگر a_n دنباله حسابی باشد a_1 و a_6 و $4a_9$ تشکیل دنباله هندسی می دهند. بنابراین:

$$a_9^2 = 4a_1a_6 \Rightarrow (a + 8d)^2 = 4a(a + 5d) \Rightarrow 3a^2 + 22ad - 25d^2 = 0$$

دو طرف معادله را بر d^2 تقسیم می کنیم. اگر $k = \frac{a}{d}$ باشد، خواهیم داشت:

$$3\left(\frac{a}{d}\right)^2 + 22\frac{a}{d} - 25 = 0 \Rightarrow 3k^2 + 22k - 25 = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = 1 \Rightarrow \frac{a}{d} = 1 \Rightarrow a = d \\ k = -\frac{25}{3} \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

$$\frac{a_7}{a_1} = \frac{a + d}{a} = \frac{2a}{a} = 2$$

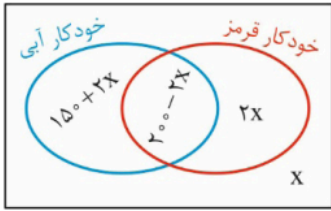
جملات دنباله حسابی مثبت می باشند. در نتیجه نسبت $\frac{a}{d}$ مثبت است. در نتیجه:

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

به کمک نمودار ون به راحتی قابل محاسبه است. **سرنخ**

۱۰۸

پله اول:



x = تعداد دانش آموزانی که نه خودکار آبی و نه خودکار قرمز دارند.

$2x$ = تعداد دانش آموزانی که فقط خودکار قرمز دارند

$200 - 2x$ = تعداد دانش آموزانی که هم خودکار آبی و هم قرمز دارند.

$350 - (200 - 2x) = 150 + 2x$ = تعداد دانش آموزانی که فقط خودکار آبی دارند.

پله دوم:

$$500 = 150 + 2x + 200 - 2x + 2x + x$$

$$500 = 350 + 3x \rightarrow 3x = 150 \rightarrow x = 50$$

$2x + 150 + 2x = 150 + 4x = 150 + 4(50) = 350$ = تعداد دانش آموزانی که یک نوع خودکار دارند.

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

وقتی اعضای B تغییر نمی‌کنه می‌تونیم بگیم این عضو دلخواه در مجموعه B هم بوده پس می‌شه گفت $A \subseteq B$ است. **سرنخ**

۱۰۹

پله اول: با اضافه کردن هر عضو A به B ، تعداد اعضای B تغییر نمی‌کند. پس $A \subseteq B$ است.

$$B' - A' = B' \cap A = A \cap B' = A - B \xrightarrow{A \subseteq B} \begin{cases} A - B = \emptyset \\ A \cup B = B \end{cases}$$

$$C \subseteq A \subseteq B \rightarrow C \subseteq B \rightarrow B \cup C = B$$

$$(B' - A') \cup (B \cup C)' = \emptyset \cup B' = B'$$

پله دوم:

بنابراین متمم عبارت $(B' - A') \cup (B \cup C)'$ برابر است با:

$$((B' - A') \cup (B \cup C))' = (B')' = B = A \cup B$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

اختلاف تعداد دایره ها در شکل های متوالی، تشکیل دنباله حسابی می دهند پس دنباله از نوع درجه دوم است.

پله اول:

شماره شکل	۱	۲	۳	۴
تعداد دایره ها	۱	۳	۶	۱۰

جمله عمومی به صورت $an^2 + bn + c$ می باشد:

$$2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$b = (a_2 - a_1) - 2a \Rightarrow b = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + C \xrightarrow[n=1]{a_n=1} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + C = 1 \Rightarrow C = 0$$

$$a_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

پله دوم:

$$\text{تعداد دایره ها در شکل } m = \frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{2}m$$

$$\text{تعداد دایره ها در شکل } n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n \Rightarrow \frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{2}m = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 25$$

$$\xrightarrow{\times 2} m^2 + m = n^2 + n + 50 \Rightarrow m^2 - n^2 + m - n = 50 \Rightarrow (m+n)(m-n) + m - n = 50$$

$$\Rightarrow \frac{(m-n)(m+n+1)}{a} = 50 \Rightarrow a \times b = 50, b > a$$

پله سوم:

$$50 = 1 \times 50 \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=50 \end{cases} \Rightarrow a+b=51 \Rightarrow 2m+1=51 \Rightarrow \begin{cases} m=25 \\ n=24 \end{cases}$$

$$2 \times 25 \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=25 \end{cases} \Rightarrow a+b=27 \Rightarrow 2m+1=27 \Rightarrow \begin{cases} m=13 \\ n=11 \end{cases}$$

$$5 \times 10 \Rightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=10 \end{cases} \Rightarrow a+b=15 \Rightarrow 2m+1=15 \Rightarrow \begin{cases} m=7 \\ n=2 \end{cases}$$

$$m \text{ مجموع مقادیر } \Rightarrow 25 + 13 + 7 = 45$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۱۱

سرنخ جملات را به صورت $a, a+d, \dots, b-d, b$ در نظر بگیرید.

پله اول: جملات دنباله را به صورت زیر در نظر می‌گیریم و کوچک ترین واسطه برابر $14+d$ و بزرگ ترین واسطه برابر $101-d$ است،

پس:

$$\boxed{14}, 14+d, \dots, 101-d, \boxed{101} \Rightarrow \underbrace{(101-d) - (14+d)}_{87-2d} = 81 \Rightarrow 2d = 6 \Rightarrow d = 3$$

پله دوم: حال مشخص می‌کنیم 101 چندمین جمله این دنباله است:

$$t_n = t_1 + (n-1)d \Rightarrow 101 = 14 + 3(n-1) \Rightarrow 3n = 90 \Rightarrow n = 30$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۱۲

سرنخ کلید حل مسئله استفاده از جمله عمومی دنباله حسابی ($a_n = a_1 + (n-1)d$) است. جملات را باز کنید و مثلاً به صورت $a_8 = a_1 + 7d$

بنویسید.

پله اول: با توجه به رابطه $\frac{a_1 + a_3 + a_5}{a_4 + a_6 + a_8} = \frac{4}{7}$ داریم:

$$\frac{a_1 + (a_1 + 2d) + (a_1 + 4d)}{(a_1 + 3d) + (a_1 + 5d) + (a_1 + 7d)} = \frac{4}{7} \Rightarrow 21a_1 + 35d = 12a_1 + 56d \Rightarrow 9a_1 = 21d \Rightarrow a_1 = \frac{7}{3}d$$

$$\Rightarrow \frac{a_5 + a_{11}}{a_{18} + a_{19}} = \frac{(a_1 + 4d) + (a_1 + 10d)}{(a_1 + 17d) + (a_1 + 18d)} = \frac{2a_1 + 14d}{2a_1 + 35d} = \frac{2 \times \frac{7}{3}d + 14d}{2 \times \frac{7}{3}d + 35d} = \frac{8}{17}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۱۳

سرنخ با استفاده از جمله عمومی دنباله هندسی ($a_n = a_1 q^{n-1}$)، جملات را باز کرده و پس از ساده کردن عبارت‌ها را بر هم تقسیم کنید.

پله اول: با توجه به صورت سوال داریم:

$$\frac{a_5 + a_6 + a_7 + a_8}{a_1 + a_2 + a_3 + a_4} = \frac{144}{9} \Rightarrow \frac{a_1 q^4 + a_1 q^5 + a_1 q^6 + a_1 q^7}{a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3} = 16$$

$$\frac{a_1 q^4 (1 + q + q^2 + q^3)}{a_1 (1 + q + q^2 + q^3)} = q^4 = 16 \Rightarrow q = 2$$

پله دوم:

$$\Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 9 \Rightarrow a_1 (1 + q + q^2 + q^3) = 9 \xrightarrow{q=2} 15a_1 = 9 \Rightarrow a_1 = \frac{3}{5}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۱۴

پله اول:

$$\frac{a_3 a_{17} a_{26}}{a_{24}} = 5x - 19 \Rightarrow \frac{(a_1 q^2)(a_1 q^{16})(a_1 q^{25})}{a_1 q^{23}} = a_1^2 q^{15} = (a_1 q^{10})^2 = 5x - 19 \Rightarrow a_{11}^2 = 5x - 19$$

$$a_8 \cdot a_{14} = 3x + 3 \Rightarrow (a_1 q^7)(a_1 q^{13}) = (a_1 q^{10})^2 = 3x + 3 \Rightarrow a_{11}^2 = 3x + 3$$

پله دوم:

$$\Rightarrow 5x - 19 = 3x + 3 \Rightarrow x = 11 \Rightarrow a_{11}^2 = 3(11) + 3 = 36 \Rightarrow a_{11} = \pm 6 \quad |a_x| = |a_{11}| = 6$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

پله اول:

۱۱۵

$$a_1 = t_1 \Rightarrow a = a' \quad a_7 = t_7 \Rightarrow a + 3d = a'q^6 \quad a_8 = t_8 \Rightarrow a + 7d = a'q^7$$

پله دوم:

$$t_1 \times t_8 = t_7^2 \Rightarrow a'(a'q^6) = (a'q^7)^2 \Rightarrow a(a + 7d) = (a + 3d)^2$$

$$\Rightarrow a^2 + 7ad = a^2 + 6ad + 9d^2 \Rightarrow 9d^2 - ad = d(9d - a) = 0$$

دنباله ثابت و غیر قابل قبول است $d = 0 \rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} d = \frac{a}{9} \Rightarrow a = 9d \Rightarrow \frac{t_7}{t_1} = q^6 \Rightarrow \frac{a + 3d}{a} = q^6 \Rightarrow \frac{9d + 3d}{9d} = q^6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{12d}{9d} = q^6 \Rightarrow \frac{4}{3} = q^6 \Rightarrow q = \pm \sqrt[6]{\frac{4}{3}} \Rightarrow q = \pm \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}} \xrightarrow{\text{دنباله هندسی یکنوا}} q = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

پله اول: ابتدا با استفاده از جمله عمومی دنباله، جمله اول و دوم و قدر نسبت دنباله را به دست می آوریم:

۱۱۶

$$a_n = 2 \times 3^{n+1} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 18 \\ a_7 = 54 \end{cases} \Rightarrow r = \frac{a_7}{a_1} = \frac{54}{18} = 3$$

پله دوم: حال اگر بین دو عدد ۱۸ و ۵۴ بخواهیم n واسطه حسابی با قدر نسبت $d = r + 1 = 4$ درج کنیم، $t_1 = 18$ و $t_{n+1} = 54$ است:

$$\underbrace{18, \underbrace{\quad, \quad, \dots, \quad}_{n \text{ واسطه حسابی}}, 54}_{a=18, b=54} \Rightarrow d = \frac{b-a}{n+1} \rightarrow 4 = \frac{54-18}{n+1} = \frac{36}{n+1} \rightarrow n = 8$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

جمله عمومی دنباله حسابی به صورت $a_n = dn + b$ است، بنابراین در جمله عمومی داده شده باید ضریب n برابر صفر باشد:

۱۱۷

$$a_7 - 10 = 0 \rightarrow a_7 = 10 \rightarrow a_n = a_7 n - 5 \xrightarrow{n=7} a_7 = 7a_7 - 5 \rightarrow a_7 = 5$$

$$\begin{cases} a_7 = 10 \\ a_7 = 5 \end{cases} \rightarrow d = a_7 - a_7 = 5 \rightarrow a_1 - 2a_7 = (a_7 + 7d) - 2a_7 = 7d - a_7 = 35 - 10 = 25$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

به طرفین رابطه $a^2 + 9b^2 = 10ab$ جمله $6ab$ را اضافه می کنیم:

۱۱۸

$$a^2 + 6ab + 9b^2 = 16ab \Rightarrow (a + 3b)^2 = 16ab \Rightarrow a + 3b = 4\sqrt{ab}$$

$$\Rightarrow \log\left(\frac{a + 3b}{4}\right) = \log\frac{4\sqrt{ab}}{4} = \log\sqrt{ab} = \log(ab)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\log ab) = \frac{1}{2}(\log a + \log b) = \frac{\log a + \log b}{2}$$

بنابراین $\log\left(\frac{a + 3b}{4}\right)$ واسطه حسابی دو جمله $\log a$ و $\log b$ است.

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۱۹

$d = 4$ قدر نسبت $\rightarrow a_1, a_1 + 4, \dots, 42$: داده‌ها

جمله عمومی دنباله حسابی : $a_n = a_1 + (n-1)(4) \xrightarrow{n=10} a_{10} = a_1 + 36 = 42 \rightarrow a_1 = 6$

$$\text{جمله وسط} = \frac{a_1 + a_{10}}{2} = \frac{6 + 42}{2} = \frac{48}{2} = 24$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۲۰

نکته: مجموعه $\{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$ را بازه باز (a, b) و مجموعه $\{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$ را بازه نیم باز $[a, b)$ می‌نامند.

بازه باز A را (a, b) و بازه نیم باز B را $[c, d)$ در نظر می‌گیریم (زیرا $A \cap B$ از سمت چپ بسته است). با توجه به اجتماع و اشتراک داده شده، هر یک از اعداد a, b, c, d ، یکی از اعداد $0, 1, 2, 5$ هستند. با آزمون و خطا یکی از دو حالت زیر امکان پذیر است:

حالت اول: $A = (0, 5)$ و $B = [1, 2)$. در این حالت B زیر مجموعه A است، پس این جواب غیر قابل قبول است.

حالت دوم: $A = (0, 2)$ و $B = [1, 5)$. این حالت قابل قبول است. پس داریم:

$$A - B = (0, 2) - [1, 5) = (0, 1)$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۲۱

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

با توجه به نکته و فرض سؤال داریم:

$$\frac{n(A \cap B)}{n(A \cup B)} = \frac{n(A \cap B)}{n(A) + n(B) - n(A \cap B)} = \frac{n(A \cap B)}{8n(A \cap B) + 3n(A \cap B) - n(A \cap B)} = \frac{n(A \cap B)}{10n(A \cap B)} = \frac{1}{10}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۲۲

نکته: جمله n ام یک دنباله حسابی با جمله اول t_1 و قدرنسبت d به صورت $t_n = t_1 + (n-1)d$ است.

$$\begin{cases} t_3 + t_{11} = 30 \Rightarrow t_1 + 2d + t_1 + 10d = 30 \Rightarrow 2t_1 + 12d = 30 \Rightarrow t_1 + 6d = 15 \\ t_8 = 10 \Rightarrow t_1 + 7d = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 45 \\ d = -5 \end{cases}$$

پس جمله عمومی دنباله به صورت $t_n = 45 + (n-1)(-5) = -5n + 50$ است. اکنون داریم:

$$t_n = 0 \Rightarrow -5n + 50 = 0 \Rightarrow n = 10$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۲۳

نکته: اگر a, b, c و جملات متوالی یک دنباله هندسی باشند، آنگاه $a = \frac{b}{r}$ و $c = br$ که r قدرنسبت این دنباله است.

$$abc = \left(\frac{b}{r}\right)(b)(br) = \frac{27}{8} \Rightarrow b^3 = \frac{27}{8} \Rightarrow b = \frac{3}{2}$$

با استفاده از نکته بالا داریم:

$$\text{با جایگذاری این مقدار در معادله } a + b + c = \frac{21}{4} \Rightarrow \frac{b}{r} + b + br = \frac{21}{4}$$

$$b\left(\frac{1}{r} + 1 + r\right) = \frac{21}{4} \Rightarrow \frac{3}{2}\left(\frac{1}{r} + 1 + r\right) = \frac{21}{4} \Rightarrow \frac{1}{r} + 1 + r = \frac{7}{2} \Rightarrow r + \frac{1}{r} = \frac{5}{2}$$

$$\text{بنابراین: } -a + b - c = -\frac{b}{r} + b - br = b\left(-\frac{1}{r} + 1 - r\right) = \frac{3}{2}\left(-\frac{5}{2} + 1\right) = -\frac{9}{4}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۲۴

نکته: به طور کلی الگوهایی را که جمله عمومی آن‌ها به صورت $t_n = an + b$ است، الگوهای خطی می‌نامیم که در آن a و b اعداد حقیقی دلخواه و ثابت هستند.

مطابق نکته، جمله عمومی یک الگوی خطی به صورت $t_n = an + b$ است. پس در الگوی داده شده باید ضریب n^2 صفر باشد، یعنی:

$$3a - 6 = 0 \Rightarrow 3a = 6 \Rightarrow a = 2$$

راه حل اول:

با جایگذاری $a = 6$ ، جمله عمومی دنباله به صورت $t_n = 6n + 5$ درمی‌آید. حال جملات پنجم و نهم دنباله را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} t_9 = 6 \times 9 + 5 = 59 \\ t_5 = 6 \times 5 + 5 = 35 \end{cases} \Rightarrow t_9 - t_5 = 24$$

راه حل دوم:

نکته: در الگوی خطی $t_n = an + b$ داریم:

$$t_n - t_m = (n - m)a$$

مطابق نکته و اینکه $a = 6$ داریم:

$$a_9 - a_5 = (9 - 5) \times 6 = 24$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۲۵

راه حل اول:

با توجه به الگوی ارائه شده، تعداد مربع‌های وسط هر شکل، مربع کامل است.

همچنین در هر مرحله، ۴ دایره نیز به دور شکل اضافه می‌شود. پس:

مرحله	۱	۲	۳	...	n
تعداد دایره‌ها	$(1+1)^2 + 1 \times (4)$	$(2+1)^2 + 2 \times (4)$	$(3+1)^2 + 3 \times (4)$	...	$(n+1)^2 + n \times (4)$

$$t_n = (n^2 + 2n + 1) + 4n = n^2 + 6n + 1$$

بنابراین جمله عمومی این دنباله به صورت زیر است:

راه حل دوم:

با دقت به هر مرحله از شکل‌ها، با اضافه کردن ۸ دایره به اطراف هر شکل، یک مربع به دست می‌آید که تعداد دایره‌های ضلع‌های آن از شماره

مرحله آن ۳ واحد بیشتر است. بنابراین:

n	۱	۲	۳	...	n
a _n	$(1+3)^2 - 8$	$(2+3)^2 - 8$	$(3+3)^2 - 8$	...	$(n+3)^2 - 8 = n^2 + 6n + 1$

راه حل سوم (راه حل تستی):

چند جمله اول هر کدام از دنباله‌های داده شده در گزینه‌ها را به دست می‌آوریم و با تعداد دایره‌ها مقایسه می‌کنیم:

گزینه ۱:	n	۱	۲		
a _n	۸	۱۳			✗
گزینه ۲:	n	۱			
b _n	۶				✗
گزینه ۳:	n	۱	۲	۳	...
c _n	۸	۱۷	۲۸	...	✓
گزینه ۴:	n	۱			
d _n	۵				✗

بنابراین گزینه ۳ پاسخ است.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۲۶

نکته: اگر A و B دو مجموعه متناهی دلخواه باشند، داریم: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

مجموعه افراد کلاس را U (مجموعه مرجع)، مجموعه افراد علاقه‌مند به خطاطی را A و مجموعه افراد علاقه‌مند به نقاشی را B می‌نامیم. طبق فرض داریم: $n(U) = ۳۲$ ، $n(A) = ۱۷$ ، $n(B) = ۲۱$

تعداد افرادی که به هر دو رشته علاقه‌مند هستند، برابر $n(A \cap B)$ است. مشخص است که تعداد اعضای اشتراک دو مجموعه از تعداد اعضای هر یک از آن مجموعه‌ها کمتر است. پس $n(A \cap B) \leq ۱۷$. برای یافتن حداقل $n(A \cap B)$ به این نکته توجه می‌کنیم که $n(A \cup B)$ حداکثر برابر $n(U)$ است، پس:

$n(A \cup B) \leq n(U) \Rightarrow n(A) + n(B) - n(A \cap B) \leq n(U) \Rightarrow ۱۷ + ۲۱ - n(A \cap B) \leq ۳۲ \Rightarrow n(A \cap B) \geq ۱۷ + ۲۱ - ۳۲$
 $\Rightarrow n(A \cap B) \geq ۶$ بنابراین $۶ \leq n(A \cap B) \leq ۱۷$ پس گزینه ۳ پاسخ است.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۲۷

نکته: جمله n ام دنباله هندسی t_n به صورت $t_n = t_1 r^{n-1}$ است که در آن t_1 جمله اول و r قدرنسبت می‌باشد. ($t_1, r \neq 0$)

نکته: جمله n ام دنباله حسابی a_n به صورت $a_n = a_1 + (n-1)d$ است که a_1 جمله اول و d قدرنسبت دنباله است.

با توجه به فرض سؤال داریم:

$$t_6 = ۲۷t_3 \Rightarrow t_1 r^5 = ۲۷t_1 r^2 \Rightarrow r^3 = ۲۷ \Rightarrow r = ۳$$

اگر عدد ۱۰۰ را جمله a_n و عدد ۱۰ را جمله a_1 و قدرنسبت را ۳ در نظر بگیریم داریم:

$$۱۰۰ = ۱۰ + (n-1) \times ۳ \Rightarrow ۹۰ = ۳n - ۳ \Rightarrow ۳n = ۹۳ \Rightarrow n = ۳۱$$

اگر دو عدد ۱۰۰ و ۱۰ را از این تعداد کم کنیم تعداد ۲۹ عدد با قدرنسبت ۳ می‌توان بین دو عدد ۱۰ و ۱۰۰ درج کرد.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۲۸

اگر جمله پنجم را قبل از تغییر قدرنسبت a_5 و بعد از تغییر قدرنسبت a'_5 بنامیم طبق مفروضات سوال، داریم: $a'_5 = ۲a_5$

قدرنسبت را قبل از تغییر d و بعد از تغییر $d+1$ در نظر می‌گیریم:

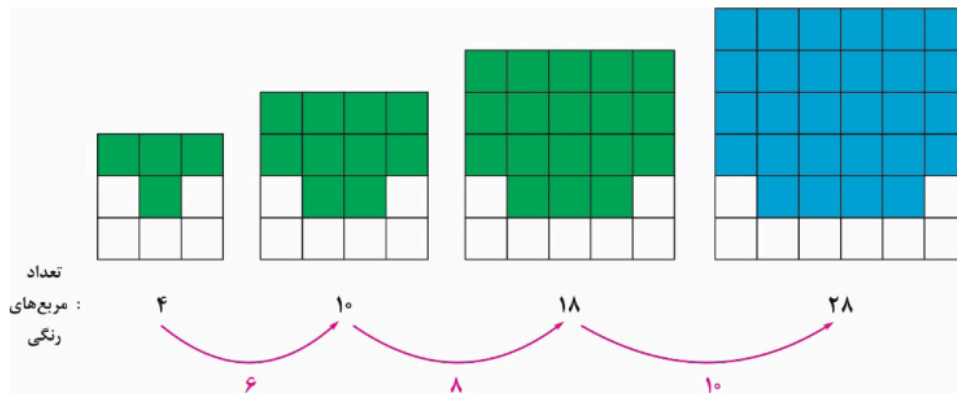
$$a'_5 = ۲a_5 \Rightarrow a_1 + 4(d+1) = 2(a_1 + 4d)$$

$$a_1 + 4d + 4 = 2a_1 + 8d \rightarrow a_1 + 4d = 4$$

$$a_5 = 4$$

پس جمله پنجم قبل از تغییر قدرنسبت ۴ بوده است.

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)



اختلاف جملات تشکیل دنباله حسابی می دهند، بنابراین جملات الگو، تشکیل دنباله درجه دوم می دهند.

$$\text{قدر نسبت دنباله حسابی} = d = 2 \rightarrow a = \frac{d}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$a_n = n^2 + bn + c \rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 + b + c = 4 \rightarrow b + c = 3 \\ a_2 = 4 + 2b + c = 10 \rightarrow 2b + c = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = 3 \\ c = 0 \end{cases}$$

$$a_n = n^2 + 3n \rightarrow a_{25} = 625 + 75 = 700$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

جملات را به صورت $a, a+d, \dots, b-d, b$ در نظر بگیرید. **سرنخ**

پله اول: جملات دنباله را به صورت زیر در نظر می گیریم و کوچک ترین واسطه برابر $14+d$ و بزرگ ترین واسطه برابر $101-d$ است، پس:

$$\boxed{14}, 14+d, \dots, 101-d, \boxed{101} \Rightarrow \underbrace{(101-d) - (14+d)}_{87-2d} = 81 \Rightarrow 2d = 6 \Rightarrow d = 3$$

پله دوم: حال مشخص می کنیم 101 چندمین جمله این دنباله است:

$$t_n = t_1 + (n-1)d \Rightarrow 101 = 14 + 3(n-1) \Rightarrow 3n = 90 \Rightarrow n = 30$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

پله اول:

$$\frac{a_3 a_{17} a_{25}}{a_{24}} = 5x - 19 \Rightarrow \frac{(a_1 q^2)(a_1 q^{16})(a_1 q^{25})}{a_1 q^{23}} = a_1^3 q^{20} = (a_1 q^{10})^2 = 5x - 19 \Rightarrow a_{11}^2 = 5x - 19$$

$$a_8 \cdot a_{14} = 3x + 3 \Rightarrow (a_1 q^7)(a_1 q^{13}) = (a_1 q^{10})^2 = 3x + 3 \Rightarrow a_{11}^2 = 3x + 3$$

پله دوم:

$$\Rightarrow 5x - 19 = 3x + 3 \Rightarrow x = 11 \Rightarrow a_{11}^2 = 3(11) + 3 = 36 \Rightarrow a_{11} = \pm 6$$

$$|a_x| = |a_{11}| = 6$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

پله اول:

۱۳۲

$$a_1 = t_1 \Rightarrow a = a' \quad a_4 = t_4 \Rightarrow a + 3d = a'q^3 \quad a_8 = t_8 \Rightarrow a + 7d = a'q^7$$

پله دوم:

$$\Rightarrow t_1 \times t_8 = t_4^2 \Rightarrow \text{در دنباله هندسی}$$

$$\Rightarrow a'(a'q^7) = (a'q^3)^2 \Rightarrow a(a + 7d) = (a + 3d)^2$$

$$\Rightarrow \cancel{a'} + 7ad = \cancel{a'} + 6ad + 9d^2 \Rightarrow 9d^2 - ad = d(9d - a) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d = 0 \rightarrow \text{دنباله ثابت و غیر قابل قبول است} \\ d = \frac{a}{9} \Rightarrow a = 9d \Rightarrow \frac{t_4}{t_1} = q^3 \Rightarrow \frac{a + 3d}{a} = q^3 \Rightarrow \frac{9d + 3d}{9d} = q^3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{12d}{9d} = q^3 \Rightarrow \frac{4}{3} = q^3 \Rightarrow q = \pm \sqrt[3]{\frac{4}{3}} \Rightarrow q = \pm \frac{\sqrt[3]{12}}{3} \xrightarrow{\text{دنباله هندسی یکنوا}} q = \frac{\sqrt[3]{12}}{3}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

پله اول: ابتدا با استفاده از جمله عمومی دنباله، جمله اول و دوم و قدر نسبت دنباله را به دست می آوریم:

۱۳۳

$$a_n = 2 \times 3^{n+1} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 18 \\ a_4 = 54 \end{cases} \Rightarrow r = \frac{a_4}{a_1} = \frac{54}{18} = 3$$

پله دوم: حال اگر بین دو عدد ۱۸ و ۵۴ بخواهیم n واسطه حسابی با قدر نسبت $d = r + 1 = 4$ درج کنیم، $t_1 = 18$ و $t_{n+1} = 54$ است:

$$\overbrace{18, O, O, \dots, O, 54}^{n \text{ واسطه حسابی}} \Rightarrow \frac{b=54}{a=18} \rightarrow d = \frac{b-a}{n+1} \rightarrow 4 = \frac{54-18}{n+1} = \frac{36}{n+1} \rightarrow n = 8$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۳۴

سرنخ

حواستون هست که توی دنباله حسابی داده شده a_4 واسطه حسابی a_2 و a_6 هست؟ خب پس منتظر چی هستید؟ شروع کنید

دیگه

پله اول:

در دنباله حسابی a_n داریم:

$$2a_4 = a_2 + a_6 = a_1 + a_7$$

$$a_2 + a_6 = 4a_4 + 12 \rightarrow 2a_4 = 4a_4 + 12 \rightarrow a_4 = -6$$

پله دوم: در دنباله هندسی، $b_n = b_1 q^{n-1}$ است، بنابراین داریم:

$$b_3 = 2b_2 \rightarrow b_1 q^2 = 2b_1 q \xrightarrow{b_1 \neq 0} q^2 = 2q \xrightarrow{q \neq 0} q = 2$$

$$a_4 = -b_2 = -6 \rightarrow b_2 = 6 = b_1 q \rightarrow b_1 = \frac{6}{q} = \frac{6}{2} = 3$$

پله سوم:

$$\frac{a_1 + a_7}{b_4} = \frac{2a_4}{b_1 q^3} = \frac{2 \times (-6)}{3(2)^3} = \frac{-12}{24} = \frac{-1}{2}$$

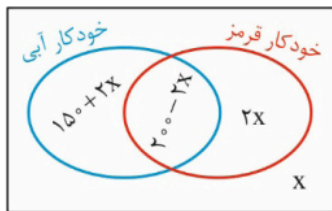
(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۳۵

سرنخ

به کمک نمودار ون به راحتی قابل محاسبه است.

پله اول:



x = تعداد دانش آموزانی که نه خودکار آبی و نه خودکار قرمز دارند.

$2x$ = تعداد دانش آموزانی که فقط خودکار قرمز دارند

$200 - 2x$ = تعداد دانش آموزانی که هم خودکار آبی و هم قرمز دارند.

$350 - (200 - 2x) = 150 + 2x$ = تعداد دانش آموزانی که فقط خودکار آبی دارند.

پله دوم:

$$500 = 150 + 2x + 200 - 2x + 2x + x$$

$$500 = 350 + 3x \rightarrow 3x = 150 \rightarrow x = 50$$

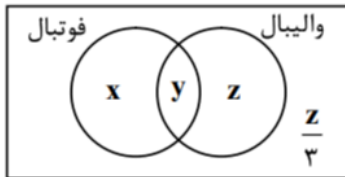
$$2x + 150 + 2x = 150 + 4x = 150 + 4(50) = 350$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۳۶

اگر تعداد افرادی که فقط فوتبال بازی می کنند برابر x ، تعداد افرادی که فقط والیبال بازی

می کنند برابر z و تعداد افرادی که در هر دو رشته فعالیت می کنند برابر y باشد، داریم: 1000



$$\begin{cases} x + y = 620 \Rightarrow x = 620 - y \\ y + z = 720 \Rightarrow z = 720 - y \end{cases}$$

از طرفی داریم:

$$x + y + \frac{4}{3}z = 1000 \Rightarrow 620 - y + y + \frac{4}{3}(720 - y) = 1000$$

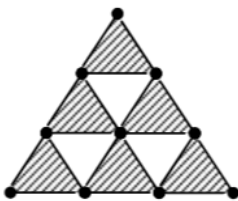
$$\Rightarrow 620 + 960 - \frac{4}{3}y = 1000 \Rightarrow \frac{4}{3}y = 580$$

$$y = \frac{580 \times 3}{4} = 145 \times 3 = 435$$

$$x = 620 - 435 = 185$$

بنابراین تعداد افرادی که فقط فوتبال بازی می کنند (x) برابر است با:

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)



کافی است توجه کنیم، هر مثلث هاشورخورده توسط سه چوب کبریت به وجود آمده است. بنابراین تعداد چوب کبریت ها سه برابر تعداد مثلث های هاشورخورده (مثلث های به طول ضلع یک واحد که رو به بالا هستند) است.

تعداد این مثلث ها در مرحله n ام، از رابطه $1 + 2 + 3 + \dots + n$ به دست می آید. پس تعداد چوب کبریت ها در مرحله بیستم برابر است با:

$$3(1 + 2 + 3 + \dots + 20) = 3 \times \frac{20 \times 21}{2} = 3 \times 210 = 630$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۳۸

اگر a_n دنباله اول و b_n دنباله دوم باشد، داریم:

$$a_n : a_1, a_1 + d, \dots$$

$$\Rightarrow a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$b_n : a_1 + 4, a_1 + 4 + d + 3, \dots$$

$$\Rightarrow b_n = a_1 + 4 + (n-1)(d+3)$$

حال داریم:

$$a_{10} = a_1 + 9d, \quad b_{10} = a_1 + 4 + 9(d+3) = a_1 + 9d + 31$$

بنابراین:

$$b_{10} - a_{10} = 31$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۳۹

فرض کنیم a_1, a_2, a_3 ، سه جمله ابتدایی دنباله هندسی a_n ، با قدرنسبت r باشند، بنابراین $3a_1, 6a_2, 12a_3$ ، جملات متوالی یک دنباله حسابی هستند. پس داریم:

$$3a_1, 6(a_1r), 12(a_1r^2) \xrightarrow{\text{دنباله حسابی}} 2 \times 6(a_1r) = 3a_1 + 12(a_1r^2) \Rightarrow 12a_1r = 3a_1 + 12a_1r^2 \xrightarrow{+3a_1} 4r = 1 + 4r^2$$

$$\Rightarrow 4r^2 - 4r + 1 = 0 \Rightarrow (2r-1)^2 = 0 \Rightarrow 2r-1=0 \Rightarrow r = \frac{1}{2}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۴۰

نکته: برای دو مجموعه A و B از مجموعه مرجع U داریم:

$$n(A') = n(U) - n(A) \quad , \quad n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) \quad , \quad n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

راه حل اول:

اگر مجموعه دانش آموزانی را که عضو تیم فوتبال هستند، A و مجموعه دانش آموزانی را که عضو تیم والیبال هستند، B بنامیم، داریم:

$$n(U) = 28 \quad , \quad n(A) = 12 \quad , \quad n(B) = 11$$

مجموعه افرادی که عضو هیچ کدام از این تیم‌ها نیستند، $A' \cap B'$ است. پس داریم:

$$n(A' \cap B') = 7 \Rightarrow n((A \cup B)') = 7 \Rightarrow n(U) - n(A \cup B) = 7 \Rightarrow 28 - n(A \cup B) = 7 \Rightarrow n(A \cup B) = 21$$

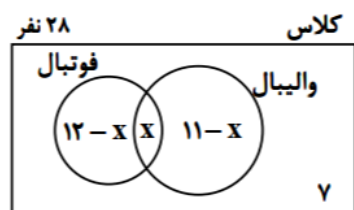
$$\Rightarrow n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 21 \Rightarrow 12 + 11 - n(A \cap B) = 21 \Rightarrow n(A \cap B) = 2$$

مجموعه دانش آموزانی که فقط عضو تیم فوتبال هستند، $A - B$ است. پس داریم:

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 12 - 2 = 10$$

راه حل دوم:

با توجه به نمودار ون روبه‌رو داریم:



$$7 + 11 - x + x + 12 - x = 28 \Rightarrow 30 - x = 28 \Rightarrow x = 2$$

بنابراین تعداد دانش آموزانی که فقط عضو تیم فوتبال هستند، برابر است با:

$$12 - 2 = 10$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۴۱

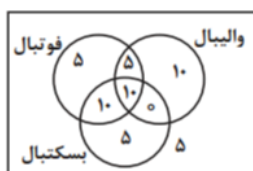
اگر F را فوتبال، V را والیبال و B را بسکتبال بگیریم داریم:

$$n(F \cup B \cup V) = n(F) + n(V) + n(B) - n(F \cap V) - n(F \cap B) - n(V \cap B) + n(F \cap V \cap B)$$

$$45 = 30 + 25 + 25 - 15 - 20 - 10 + n(F \cap V \cap B)$$

$$\Rightarrow n(F \cap V \cap B) = 10$$

سپس نمودار ون مقابل را با توجه به جدول و عدد به‌دست آمده می‌توان تکمیل کرد حال داریم:



$$n(\text{فقط فوتبال}) + n(\text{فقط والیبال}) + n(\text{فقط بسکتبال}) = 5 + 10 + 5 = 20$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۴۲

می‌دانیم که جمله عمومی دنباله هندسی به‌صورت $a_n = a_1 r^{n-1}$

$$a_1 = a_1^3 \rightarrow a_1 r^1 = (a_1 r^3)^3 \rightarrow a_1 r^1 = a_1^3 r^9 \xrightarrow{a_1 \neq 0} r^1 = a_1^3 r^9 \rightarrow a_1 = \frac{r^9}{r^9} = r^9$$

در ادامه جمله‌ای را می‌یابیم که برابر با مکعب جمله اول است.

$$a_n = a_1^3 \rightarrow a_1 r^{n-1} = a_1^3 \xrightarrow{a_1 = r^9} r^9 \times r^{n-1} = (r^9)^3 \rightarrow r^{n-1} = r^{27} \rightarrow n-1 = 27 \rightarrow n = 28$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۴۳

نمایش چهار جمله متوالی حسابی به صورت $a, a+d, a+2d, a+3d$ با قدر نسبت d و جمله اول a است.

$$3a + 6d = 122 \xrightarrow{+2} 2a + 3d = 61 \quad (1)$$

در صورت سوال گفته که مجموع سه جمله کوچکتر از دو برابر جمله بزرگتر؛ یک واحد کمتر است یعنی:

$$a + a + d + a + 2d = 2(a + 3d) - 1 \Rightarrow 3a + 3d = 2a + 6d - 1 \Rightarrow a = 3d - 1 \quad (2)$$

حال با جایگذاری (۲) و (۱) دستگاه معادلات مربوطه را حل می‌کنیم:

$$2(3d - 1) + 3d = 61 \Rightarrow 6d - 2 + 3d = 61 \Rightarrow 9d = 63 \Rightarrow d = 7 \quad a = 3d - 1 \xrightarrow{d=7} a = 3(7) - 1 = 20$$

بنابراین کمترین سهم ۲۰ است.

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

$$\frac{d}{a_1} = \frac{2}{3} \Rightarrow a_1 = \frac{3}{2}d$$

با توجه به عبارت صورت سؤال داریم

۱۴۴

اگر جملات عمومی دنباله حسابی و هندسی را به ترتیب با a_n و b_n نشان دهیم، آنگاه داریم:

$$a_1 = a_1 + 6d, \quad b_1 = b_1 q$$

$$a_{12} = a_1 + 11d, \quad b_1 = b_1 q^2$$

طبق صورت سؤال، $a_{12} = b_1$ و $a_1 = b_1$ پس داریم:

$$a_1 = b_1 \Rightarrow a_1 + 6d = b_1 q \xrightarrow{a_1 = \frac{3}{2}d} \frac{15}{2}d = b_1 q \quad (1)$$

$$a_{12} = b_1 \Rightarrow a_1 + 11d = b_1 q^2 \xrightarrow{a_1 = \frac{3}{2}d} \frac{25}{2}d = b_1 q^2 \quad (2) \quad \xrightarrow{(1) + (2)} \frac{15}{2}d = \frac{b_1 q}{\frac{25}{2}d} \Rightarrow q = \frac{5}{3}$$

با جایگذاری $q = \frac{5}{3}$ در تساوی (۱) داریم: $\frac{15}{2}d = b_1 \left(\frac{5}{3}\right) \Rightarrow b_1 = \frac{9}{2}d$

$$\Rightarrow a_n = a_1 + (n-1)d \xrightarrow{a_1 = \frac{3}{2}d} a_n = (n+0.5)d \Rightarrow a_n = b_1 \Rightarrow (n+0.5)d = 4.5d \Rightarrow n = 4.5 - 0.5 = 4$$

روش دوم

از آنجایی که $\frac{d}{a_1} = \frac{2}{3}$ می‌توانیم $d = 2x$ و $a_1 = 3x$ در نظر بگیریم.

$$a_1 = a_1 + 6d = 3x + 6(2x) = 15x \quad a_{12} = a_1 + 11d = 3x + 11(2x) = 25x$$

$$\frac{b_1}{b_1} = \frac{15x}{25x} \Rightarrow q = \frac{b_1}{b_1} = \frac{25x}{15x} = \frac{5}{3} \quad b_1 \times q = b_1 \Rightarrow b_1 \times \frac{5}{3} = 15x \Rightarrow b_1 = 9x \quad 9x = a_1 + (n-1)d = 3x + (n-1)2x \Rightarrow n = 4$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

$$a_x = ax^2 + bx + c$$

جملات اول هر دسته به صورت $2, 4, 8, 14, \dots$ می‌باشند که تشکیل یک دنباله درجه دوم داده‌اند.

۱۴۵

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = a + b + c = 2 \\ a_2 = 4a + 2b + c = 4 \\ a_3 = 9a + 3b + c = 8 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3a + b = 2 \\ 5a + b = 4 \end{array} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3a + b = 2 \\ 5a + b = 4 \end{array} \right\} 2a = 2$$

$$\Rightarrow a = 1$$

$$\Rightarrow b = -1$$

$$\Rightarrow c = 2$$

$$\Rightarrow a_x = x^2 - x + 2 \xrightarrow{a_{20}} \text{جمله اول دسته بیستم} = 400 - 20 + 2 = 382$$

جملات هر دسته تشکیل دنباله‌ای حسابی با قدر نسبت $d = 2$ می‌دهند.

بنابراین آخرین جمله دسته برابر است با $382 + 19 \times 2 = 420$ در یک دنباله حسابی میانگین جملات برابر است با میانگین جملات اول و آخر. پس مجموع جملات دسته بیستم برابر است با:

$$20 \times \frac{382 + 420}{2} = 10 \times 802 = 8020$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۴۶

پاسخ تشریحی گام اول: جمله عمومی دنباله حسابی $a_n = a_1 + (n-1)d$ است:

$$\Rightarrow a_7 = a_1 + d \quad a_7 = a_1 + 2d$$

گام دوم: جمله‌ها را در رابطه داده شده جای گذاری می‌کنیم:

$$2(a_1 + d)^7 = (2(a_1 + 2d) + (a_1 + d))a_1 \Rightarrow 2a_1^7 + 4a_1d + 2d^7 = 3a_1^7 + 5a_1d \Rightarrow a_1^7 + da_1 - 2d^7 = 0$$

گام سوم: تساوی بالا را می‌توانیم به چشم یک معادله درجه دوم بر حسب a_1 نگاه کنیم. داریم:

$$(a_1 - d)(a_1 + 2d) = 0 \Rightarrow a_1 = d \text{ یا } a_1 = -2d \Rightarrow \frac{a_1}{d} = 1 \text{ یا } \frac{a_1}{d} = -2$$

$$\frac{a_5}{d} = \frac{a_1 + 4d}{d} = \frac{a_1}{d} + 4 = 5 \text{ یا } 2$$

$\frac{d}{1 \text{ یا } -2}$

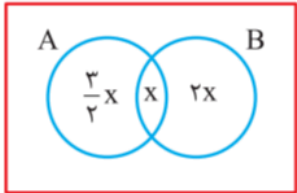
گام چهارم: نسبت جمله پنجم به d را حساب می‌کنیم:

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۴۷

گام اول: سؤال را با نمودار ون حل می‌کنیم. اگر فرض کنیم تعداد اعضای مجموعه $(A \cap B)$ برابر با x است، در این صورت داریم:

$$3n(A \cap B) = 2n(A - B) = n(B) \xrightarrow{n(A \cap B) = x} \begin{cases} n(A - B) = \frac{3}{2}x \\ n(B) = 3x \Rightarrow n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = 3x - x = 2x \end{cases}$$

گام دوم: $n((A \cup B) - (A \cap B)) = 63$ است. با توجه به نمودار ون در گام اول داریم:

$$n((A \cup B) - (A \cap B)) = (\frac{3}{2}x + x + 2x) - x = \frac{3}{2}x + 2x = \frac{7}{2}x = 63 \Rightarrow x = 18$$

گام سوم: تعداد اعضای مجموعه A برابر است با:

$$n(A) = \frac{3}{2}x + x = \frac{5}{2}x = \frac{5}{2} \times 18 = 45$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۴۸

گام اول: دسته‌بندی مورد نظر را می‌نویسیم:

$$(1, 2) \quad (3, 4, 5, 6) \quad (7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14) \quad (15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, \dots, 30) \quad \underbrace{(31, 32, \dots, 62)}_{\text{دسته پنجم}}$$

$$\text{میانگین} = \frac{31 + 32 + \dots + 62}{32} = \frac{31 + 62}{2} = \frac{93}{2} = 46.5$$

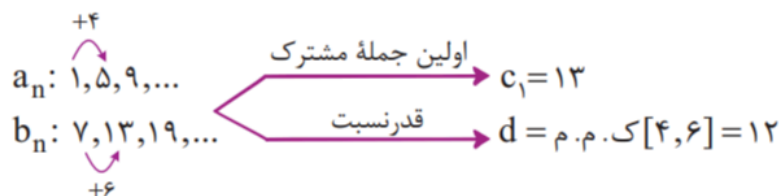
گام دوم: برای دسته پنجم، میانگین را محاسبه می‌کنیم:

توجه: در یک دنباله حسابی، میانگین جملات a_m تا a_n از رابطه $\frac{a_m + a_n}{2}$ به دست می‌آید.

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

گام اول: دو دنباله حسابی داده شده است. جملات مشترک دو دنباله حسابی، خود یک دنباله حسابی را تشکیل می‌دهند؛ بنابراین:

1149



گام دوم: پس دنباله حسابی حاصل از جملات مشترک، به صورت $c_n = c_1 + (n-1)d = 13 + (n-1)12 = 12n + 1$ است.

گام سوم: جملہ چہارم این دنبالہ را پیدا می کنیم:

$$C_f = 12 \times 4 + 1 = 49$$

که مجموع ارقام آن برابر با $۱۳ = ۹ + ۴$ است.

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

چهار جمله متوالی را به صورت $a-3d, a-d, a+d, a+3d$ نمایش می‌دهیم. با توجه به فرض داده شده داریم:

150

$$(a - \sqrt{d})(a + \sqrt{d}) = 1 \cdot (a - d)(a + d) \Rightarrow a^2 - d = 1 \cdot a^2 - 1 \cdot d \Rightarrow a^2 = d^2 \Rightarrow d = \pm a$$

پس چهار جمله به صورت $a, -a, -2a, -3a$ هستند و مجموع دو جمله میانی را برابر ۳ قرار می دهیم:

$$(-\mathfrak{r}\mathbf{a}) + (\mathfrak{r}\mathbf{a}) = \mathfrak{r} \Rightarrow \mathfrak{r}\mathbf{a} = \mathfrak{r}$$

پس جملات ۱۵، ۶، ۳- و ۱۲- هستند که مجموع ارقام جمله بزرگ‌تر شش است.

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

ابتدا جملات سوم و هفتم را به دست می آوریم:

۱۵۱

$$\mathbf{a}_r = \Delta(r)^{r-r} = \frac{\Delta}{r} \quad , \quad \mathbf{a}_v = \Delta(r)^{r-v} = \frac{\Delta}{rv}$$

سه واسطه حسابی بین جملات a_3 و a_4 را c ، $c-d$ و $c+d$ در نظر می‌گیریم که در آن d قدر نسبت دنباله حسابی به دست آمده است. مجموعه سه واسطه برابر $3c$ است اما طبق ویژگی‌های جملات متوالی و متساوی‌الفاصله در دنباله حسابی داریم:

$$\gamma \mathbf{c} = \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y \Rightarrow \mathbf{c} = \frac{\lambda \Delta}{88}$$

در نتیجه مجموع واسطه‌ها برابر $\frac{255}{64} = 3.98$ خواهد شد.

(قلمچی، ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۵۲

$$\begin{array}{l} \text{حسابی: } 1, a, b \Rightarrow 2a = b + 1^* \\ \text{هندسی: } 1, b, a, c \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} b^2 = a \times 1 \rightarrow b^2 = \frac{b+1}{2} \\ 2b^2 = b+1 \Rightarrow 2b^2 - b - 1 = 0 \\ a^2 = bc \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} b=1 \Rightarrow a=1 \text{ غ ق} \\ b=-\frac{1}{2} \Rightarrow a=\frac{1}{4} \end{array} \right. \quad a^2 = bc \Rightarrow \frac{1}{16} = \left(-\frac{1}{2}\right) \times c \Rightarrow c = -\frac{1}{8} \end{array}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۵۳

ابتدا واسطه حسابی و واسطه هندسی این دو عدد را به دست می آوریم:

$$2 - \sqrt{3}, x, \frac{1}{2 - \sqrt{3}}$$

$$2x = 2 - \sqrt{3} + \frac{1}{2 - \sqrt{3}} \times \frac{2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \quad 2x = 2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} \rightarrow 2x = 4 \rightarrow x = 2 \quad 2 - \sqrt{3}, y, \frac{1}{2 - \sqrt{3}}$$

$$y^2 = (2 - \sqrt{3})\left(\frac{1}{2 - \sqrt{3}}\right) = 1 \rightarrow y^2 = 1 \begin{cases} y = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

اختلاف واسطه حسابی و واسطه هندسی برابر است:

$$|y - x| = |1 - 2| = 1 \quad |y - x| = |-1 - 2| = 3$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

 $n(A)$ = تعداد والیبالیست‌ها $n(B)$ = تعداد فوتبالیست‌ها $n(A \cup B)$ = تعداد کل فوتبالیست‌ها یا والیبالیست‌ها $n(A \cap B)$ = تعداد کسانی که هم فوتبال و هم والیبال را بازی می‌کنند

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow 20 = n(A) + 2(n(A)) - 4 \Rightarrow 3n(A) = 24 \Rightarrow n(A) = 8$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

$$\frac{a_{21} + 4 - (a_{11} + 4)}{a_{18} + 4}$$

$$\frac{b_{21} - b_{11}}{b_{18}}$$

$$b_{n+1} = a_{n+1} + 4 = 3a_n + 12 = 3(a_n + 4) = 3b_n$$

$$\frac{b_{21}}{b_{18}} = 3^3, \frac{b_{11}}{b_{18}} = 3 \quad 3^3 - 3 = 24$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۵۵

با توجه به مخرج، به هر جمله صورت هم ۴ تا اضافه می‌کنیم:

حالا دنباله $a_n + 4$ را b_n می‌نامیم و داریم:تعریف بازگشتی b_n را ببینید:پس b_n دنباله هندسی با قدر نسبت ۳ است و داریم:

و جواب می‌شود:

۱۵۶

حسابی $\beta - \alpha$ و β و α

$$\Rightarrow 2\alpha = \beta + \beta - \alpha \Rightarrow 2\beta = 3\alpha$$

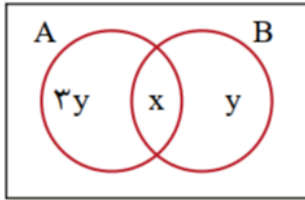
$$\begin{cases} S = \alpha + \beta = \frac{\Delta}{\gamma} \alpha = \frac{1^\circ}{a} \\ P = \alpha\beta = \frac{3}{\gamma} \alpha^2 = \frac{b}{a} \end{cases}$$

$$\frac{S^2}{P} = \frac{\left(\frac{\Delta}{\gamma} \alpha\right)^2}{\frac{3}{\gamma} \alpha^2} = \frac{\left(\frac{1^\circ}{a}\right)^2}{\frac{b}{a}} \Rightarrow \frac{2\Delta}{6} = \frac{1^\circ}{ab}$$

$$\Rightarrow \sqrt{ab} = 2\sqrt{6}$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۵۷



اگر $n(A \cap B) = x$ و $n(B - A) = y$ باشد $n(A - B) = 3y$ خواهد بود.

خواهیم داشت:

$$n(A) = 2n(B) \rightarrow 3y + x = 2(x + y) \rightarrow x = y$$

$$n(A \cup B) = 30 \rightarrow \Delta x = 30 \rightarrow x = 6 \rightarrow n(A \cap B) = 6$$

بنابراین:

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

$$\left. \begin{aligned} a_{47} = b_{74} &\rightarrow a + 46d = b = 72d' \\ a_{65} = b_{56} &\rightarrow a + 64d = b + 55d' \end{aligned} \right\} \rightarrow 18d = -18d' \rightarrow d' = -d$$

۱۵۸

خواهیم داشت:

$$b_{68} = b_{74} - 6d' = a_{47} + 6d = a_{53}$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

روش اول:

۱۵۹

$$a^3 + 1 = 2a \rightarrow a^3 - 2a + 1 = 0 \rightarrow (a - 1)(a^2 + a - 1) = 0$$

$$a \neq 1 \rightarrow a^2 + a - 1 = 0 \rightarrow a = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$a > 0 \Rightarrow a = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

$$d = 1 - a = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \text{ قدرنسبت}$$

$$b = a_4 = a_3 + 6d = 1 + 3(3 - \sqrt{5}) = 10 - 3\sqrt{5}$$

$$c = a_{11} = a_3 + 8d = 1 + 4(3 + \sqrt{5}) = 13 - 4\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow 4b - 3c = 1$$

روش دوم:

$$4(1 + 6d) - 3(1 + 8d) = 4 - 3 = 1$$

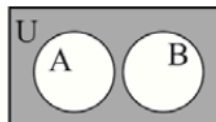
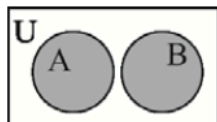
اصلاً لازم نبود a و d بدست آید.

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

A و B دو مجموعه جدا از هم هستند، یعنی اشتراک آنها تهی است. با توجه به نمودار ون، $A - B = A$ و $B - A = B$ می شود. پس داریم:

۱۶۰

$$((A - B) \cup (B - A))' = (A \cup B)' = A' \cap B'$$



$$A \cup B \longrightarrow (A \cup B)' = A' \cap B'$$

مجدداً متمم مجموعه $A' \cap B'$ به صورت $A \cup B$ خواهد بود.

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۶۱

هرگاه بین دو عدد a و b و k واسطه حسابی درج کنیم، قدرنسبت دنباله حسابی حاصل از رابطه زیر به دست می آید:

$$d = \frac{b-a}{k+1} \Rightarrow d = \frac{93-17}{18+1} = \frac{76}{19} = 4$$

بنابراین اولین واسطه عددی ۲۱ است. برای به دست آوردن واسطه دهم باید جمله دهم دنباله حسابی ای را به دست آوریم که جمله اول آن ۲۱ و قدرنسبت آن ۴ است:

$$t_{10} = t_1 + (10-1)d = 21 + 9 \times 4 = 57$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

بررسی موارد:

۱۶۲

واسطه هندسی: $b^2 = ac$ ✓ $\log b^2 = \log a.c \Rightarrow \log b^2 = \log a.c$ ✓ $2 \log b = \log a + \log c$: واسطه حلی (الف)

$$\text{ب) } a, b, c \Rightarrow \begin{cases} r = \frac{b}{a} \\ r = \frac{c}{b} \end{cases} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{c}{b} \Rightarrow b^2 = ac \quad \checkmark$$

پ) در صورتی که $a = b = c$ باشد، یعنی دنباله ثابت باشد، دنباله a, b, c دنباله حسابی با قدرنسبت صفر می باشد. ✓

ت) در هر دنباله هندسی با سه جمله متوالی مثبت هیچ گاه جمله وسط بزرگترین نمی باشد.

بنابراین b نمی تواند وتر مثلث قائم الزویه که بزرگترین ضلع مثلث است، باشد. ✗

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۶۳

جملات دنباله هندسی را به صورت $a_n = ar^{n-1}$ و دنباله حسابی را به صورت $t_n = t_1 + (n-1)d$ نشان می دهیم.

$$\begin{aligned} (1) \quad & a_1 r^3 = t_1 + 2d \\ (2) \quad & a_1 r^4 = t_1 + 4d \\ (3) \quad & a_1 r^6 = t_1 + 16d \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} (3) - (2) \quad & a_1 r^4 - a_1 r^3 = 2d \\ (2) - (1) \quad & a_1 r^4 - a_1 r^3 = 2d \end{aligned}$$

رابطه بالایی را بر پایینی تقسیم می کنیم:

$$\frac{a_1 r^4 (r^2 - 1)}{a_1 r^3 (r - 1)} = \frac{2d}{2d} \Rightarrow \frac{r(r+1)(r-1)}{r-1} = 6 \Rightarrow r^2 + r - 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} r = -3 \\ r = 2 \end{cases}$$

چون جملات دنباله هندسی مثبت هستند $r = 2$ قابل قبول است.

$$a_1 r^3 + a_1 r^4 + a_1 r^6 = 44 \xrightarrow{r=2} 8a_1 + 16a_1 + 64a_1 = 88a_1 = 44 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{2}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۶۴

نکته: در مجموعه اعداد صحیح اگر A متناهی باشد، A' حتماً نامتناهی است. اگر A نامتناهی باشد، A' می تواند متناهی یا نامتناهی باشد.

مطابق فرض سؤال، B متناهی است، پس B' نامتناهی است.

A' نامتناهی است، پس A ممکن است متناهی یا نامتناهی باشد.

حال گزینه ها را بررسی می کنیم:

گزینه ۱: $B \cup A'$ متناهی $\cup$ نامتناهی = نامتناهی حتماً نامتناهی

گزینه ۲: $A' \cup B'$ نامتناهی $\cup$ نامتناهی = نامتناهی حتماً نامتناهی

گزینه ۳: $A' - B$ نامتناهی - نامتناهی = نامتناهی حتماً نامتناهی

در گزینه ۲ $B' \cap A = (A' \cup B)'$ از آنجا که $A' \cup B$ نامتناهی است، بنابراین $B' \cap A$ ممکن است متناهی یا نامتناهی باشد. بنابراین

گزینه ۲ پاسخ است.

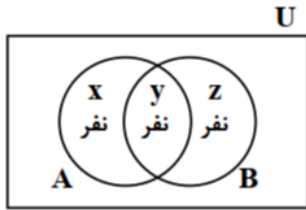
(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

نکته: اگر A و B دو مجموعه متناهی دلخواه باشند، داریم:

۱۶۵

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B), \quad n(A - B) = n(A) - n(A \cap B), \quad n(A') = n(U) - n(A)$$

با استفاده از نمودار وین و مشخص کردن هر قسمت داریم:



$$\begin{cases} n(A - B) = x \\ n(B - A) = z \\ n(A \cap B) = y = 10 \\ n(A \cup B) = x + y + z = 30 \end{cases} \Rightarrow n(A - B) + n(B - A) = x + z = n(A \cup B) - y = 30 - 10 = 20$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

نکته: جمله n ام دنباله هندسی به صورت $t_n = t_1 r^{n-1}$ است که در آن t_1 جمله اول و r قدرنسبت می‌باشد. ($t_1, r \neq 0$)

۱۶۶

اگر جمله عمومی دنباله اولیه را t_n و جمله عمومی دنباله جدید را t'_n بنامیم، داریم:

$$\frac{t'_5}{t_5} = \frac{\frac{1}{2} t_1 \times (2r)^4}{t_1 r^4} = \frac{\frac{1}{2} \times 16 \times t_1 r^4}{t_1 r^4} = 8$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

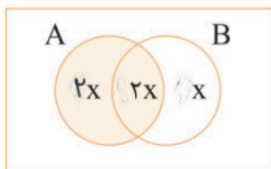
فرض می‌کنیم $n(A \cap B) = 2x$ باشد، پس:

۱۶۷

$$n(A \cap B) = n(A - B) \Rightarrow n(A - B) = 2x$$

$$n(A \cap B) = 2n(B - A) \Rightarrow 2x = 2n(B - A)$$

$$n(B - A) = x$$



$$2x + 2x + x = 45 \Rightarrow 5x = 45 \Rightarrow x = 9$$

حالا، چون $n(A \cup B) = 45$ است، پس:

تعداد اعضای مجموعه B برابر $2x + x = 18 + 9 = 27$ است.

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

با توجه به صورت سؤال، اعداد طبیعی طوری دسته‌بندی شده‌اند که در هر دسته، کوچک‌ترین عضو نصف بزرگ‌ترین عضو دسته است، یعنی دسته‌بندی اعداد به صورت زیر است:

۱۶۸

$$\underbrace{\{1, 2\}}_{\text{دسته اول}}, \underbrace{\{3, \dots, 6\}}_{\text{دسته دوم}}, \underbrace{\{7, \dots, 14\}}_{\text{دسته سوم}}, \underbrace{\{15, \dots, 30\}}_{\text{دسته چهارم}}, \underbrace{\{31, \dots, 62\}}_{\text{دسته پنجم}}$$

چون اعضای هر دسته، اعداد طبیعی متوالی‌اند، پس تعداد اعضای دسته پنجم، برابر است با:

$$62 - 31 + 1 = 32$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۶۹

مجموع سه جمله دوم را بر مجموع سه جمله اول تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{a_4 + a_5 + a_6}{a_1 + a_2 + a_3} = \frac{243}{72} \Rightarrow \frac{ar^3 + ar^4 + ar^5}{a + ar + ar^2} = \frac{9 \times 27}{9 \times 8}$$

$$\frac{ar^3(1+r+r^2)}{a(1+r+r^2)} = \frac{27}{8} \Rightarrow r^3 = \frac{27}{8} \Rightarrow r = \frac{3}{2}$$

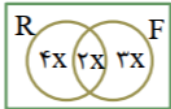
چون مجموع سه جمله اول برابر با ۷۲ است، پس:

$$a + ar + ar^2 = 72 \Rightarrow a + \frac{3}{2}a + \frac{9}{4}a = 72 \Rightarrow \frac{19}{4}a = 72 \Rightarrow a = \frac{72 \times 4}{19} = \frac{288}{19}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۷۰

نمودار ون به صورت مقابل است:



بنابراین تعداد افرادی که نه به ریاضی علاقمندند و نه به فیزیک برابر $30 - 9x$ است.
کمترین مقدار $30 - 9x$ زمانی است که $x = 3$ باشد و در نتیجه $30 - 9x = 3$ است.

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۷۱

برای مجموعه B داریم:

$$\frac{a^2}{b} = 2a - b \Rightarrow a^2 = 2ab - b^2 \Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 = 0 \Rightarrow a = b (b \neq 0)$$

بنابراین مجموعه B شامل همه زوج مرتب‌ها با مولفه اول و دوم برابر است. (به جز صفر)

بنابراین $A \cap B$ برابر با مجموعه‌ای با شرط $\{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Z}, a = b, a^2 + b^2 \leq 8\}$ خواهد بود، پس داریم:

$$A \cap B = \{(-2, -2), (-1, -1), (1, 1), (2, 2)\}$$

حال مجموعه C را می‌نویسیم:

$$C = \{(2, 2), (4, 1), (-2, -2), (-4, -1)\}$$

بنابراین $(A \cap B) \cup C$ دارای ۶ عضو است.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

دنباله $۳, ۱۳, ۲۹, ۵۱, \dots$:

اختلاف اول $۱۰, ۱۶, ۲۲, \dots$:

اختلاف دوم $۶, ۶, ۶, \dots$:

جمله صفرم (چنین جمله‌ای وجود ندارد، اما اگر فرض کنیم جمله‌ای قبل از جمله اول وجود دارد، آن را جمله صفرم می‌نامیم)

نیز برابر -۱ است. بنابراین $c = -۱$

با جایگذاری $n = ۱$ ، مقدار b را به دست می‌آوریم:

$$n = ۱ \Rightarrow ۳ + b - ۱ = ۳ \Rightarrow b = ۱$$

بنابراین جمله عمومی دنباله به صورت $۳n^۲ + n - ۱$ خواهد بود.

حال خواسته سؤال را محاسبه می‌کنیم:

$$(۳(۱۲۱) + ۱۱ - ۱) - (۳(۱۰۰) + ۱۰ - ۱) = ۶۴$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

در الگوی درجه دوم، افزایش‌ها دنباله حسابی می‌سازند:

$$\begin{array}{ccccccc} & +3 & & +3+d & & +3+2d & \\ \curvearrowright & & \curvearrowright & & \curvearrowright & & \end{array}$$

$$5, 8, x, 20$$

$$8+3+d+3+2d=20 \Rightarrow 3d=6 \Rightarrow d=2$$

$$\begin{array}{ccccccc} & +3 & & +5 & & +7 & \\ \curvearrowright & & \curvearrowright & & \curvearrowright & & \end{array}$$

$$5, 8, 13, 20$$

یعنی:

$$a = \frac{d}{2} = 1 \text{ می‌دانیم در دنباله } an^2 + bn + c \text{ ضریب } a \text{ برابر نصف } d \text{ است:}$$

پس جمله عمومی $n^2 + bn + c$ است و داریم:

$$\xrightarrow{n=1} 1 + b + c = 5$$

$$\xrightarrow{n=2} 4 + 2b + c = 8 \xrightarrow{\ominus} 3 + b = 3 \Rightarrow b = 0 \xrightarrow{\text{جایگذاری}} c = 4$$

یعنی $a_n = n^2 + 4$ و اختلاف جملات چهارم و چهل و دوم می‌شود:

$$a_{42} - a_{40} = 42^2 + 4 - (40^2 + 4) = 42^2 - 40^2 = (42 - 40)(42 + 40) = 2 \times 82 = 164$$

که از ۵ تا ۱۶۹ فاصله دارد.

راه دوم: جمله عمومی را $an^2 + bn + c$ در نظر می‌گیریم:

$$\left. \begin{array}{l} \xrightarrow{n=1} a + b + c = 5 \\ \xrightarrow{n=2} 4a + 2b + c = 8 \\ \xrightarrow{n=4} 16a + 4b + c = 20 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{\ominus} 3a + b = 3 \\ \xrightarrow{\ominus} 12a + 2b = 12 \xrightarrow{+2} 6a + b = 6 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} \begin{array}{l} a = 1 \\ b = 0 \end{array}$$

و ادامه ماجرا مثل راه اول است.

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری}} c = 4 \Rightarrow a_n = n^2 + 4$$

راه سوم: تفاضل جملات متوالی اعداد ۳، ۵، ۷ و ... است، یعنی $a_n - a_{n-1} = 2n - 1$

پس $a_{41} - a_{40} = 81$ و $a_{42} - a_{41} = 83$ و جمع آن‌ها می‌شود $a_{42} - a_{40} = 164$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۷۴

$$a_n: 100, 97, 94, \dots \quad a_1 = 100 \quad d = -3$$

$$b_n: 1, 5, 9, 13, \dots \quad b_1 = 1 \quad d = 4$$

با کمی دقت، در دنباله a_n جمله‌ای برابر ۱ داریم. در واقع آخرین جمله مثبت در دنباله a_n ، $a_{34} = 100 - 99 = 1$ است و پس از آن جملات a_n منفی می‌شوند. پس عدد ۱ کوچک‌ترین جمله مشترک است.

از طرف دیگر چون قدرنسبت‌ها مقادیر ۳ و ۴ دارند، جملات مشترک با قدرنسبت ۱۲ ایجاد می‌شوند. پس جملات مشترک عبارت‌اند از: (با شروع از ۱ و قدرنسبت ۱۲، تا عدد ۱۰۰ می‌رویم)

$$c_1 = 1$$

$$d = 12$$

$$1, 13, 25, 37, 49, 61, 73, 85, 97$$

به بیان دیگر: جمله عمومی مشترک‌ها $c_n = 1 + 12(n-1)$ یعنی $c_n = 12n - 11$ است که به‌ازای $n = 1$ تا $n = 9$ در فاصله ۱ تا ۱۰۰ قرار می‌گیرد، یعنی ۹ جمله مشترک داریم.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۷۵

$$x^4 - ax^2 + 9 = 0 \xrightarrow{x^2=t} t^2 - at + 9 = 0$$

ازاین معادله باید دو جواب مثبت برای t به‌دست بیاید. آنگاه:

$$t = x^2 = t_1 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \sqrt{t_1} \\ x_2 = -\sqrt{t_1} \end{cases}$$

$$t = x^2 = t_2 \Rightarrow \begin{cases} x_3 = \sqrt{t_2} \\ x_4 = -\sqrt{t_2} \end{cases}$$

پس باید اعداد $\underbrace{-\sqrt{t_1}}_A, \underbrace{-\sqrt{t_2}}_B, \underbrace{\sqrt{t_2}}_C, \sqrt{t_1}$ دنباله حسابی بسازند:

$$2B = A + C \Rightarrow -2\sqrt{t_2} = -\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} \Rightarrow \sqrt{t_1} = 3\sqrt{t_2} \Rightarrow t_1 = 9t_2$$

یعنی در معادله $t^2 - at + 9 = 0$ باید ریشه بزرگ‌تر ۹ برابر ریشه کوچک‌تر باشد.

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = S = a \\ t_1 t_2 = P = 9 \end{cases} \xrightarrow{t_1 = 9t_2} \begin{cases} 10t_2 = a \\ 9t_2^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow t_2 = 1 \Rightarrow a = 10$$

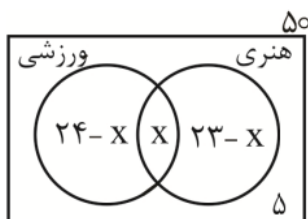
پس معادله به‌صورت $t^2 - 10t + 9 = 0$ است که ریشه‌های $t = 1, 9$ دارد.

یعنی $x = \pm 1$ و $x = \pm 3$ که دنباله حسابی $3, -1, 1, -3$ را می‌سازند و جمع قدرمطلق ریشه‌ها می‌شود $3 + 1 + 1 + 3 = 8$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۷۶

اگر تعداد افراد مشترک دو گروه را با X نشان دهیم، در نمودار ون داریم:



$$(24 - X) + X + (23 - X) + 5 = 50 \Rightarrow X = 2$$

$$23 - X = 23 - 2 = 21 \text{ فقط هنری}$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۷۷

a و b و C تشکیل یک دنباله هندسی می‌دهند. پس:

$$(2/5 b)^2 = (0/5 a)(12/5 c) \Rightarrow (\frac{5}{2} b)^2 = (\frac{1}{2} a)(\frac{25}{2} c) \Rightarrow \frac{25}{4} b^2 = \frac{25}{4} ac \Rightarrow b^2 = ac$$

پس a و b و c جملات متوالی یک دنباله هندسی هستند.

از طرف دیگر همین سه عدد، جملات چهارم، اول و هفتم یک دنباله حسابی می‌باشند، به عبارتی قرار است جملات چهارم، اول و هفتم از یک دنباله حسابی، سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی باشند. در این صورت داریم:

$$q = -2$$

از طرفی در دنباله حسابی داریم:

$$a_4 \times (-2) = a_1 \Rightarrow (a_1 + 3b)(-2) = a_1 \Rightarrow -2a_1 - 6d = a_1 \Rightarrow -3a_1 = 6d \Rightarrow d = \frac{-1}{2} a_1$$

$$\xrightarrow{a_1=b} d = \frac{-1}{2} b$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۷۸

با توجه به یک بودن جمله اول دنباله حسابی و طبیعی و نابیشتر بودن جمله‌ها از ۳۱ داریم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \leq 31 \rightarrow (n-1)d \leq 30$$

حداقل n برابر ۳ است (چون برای تشکیل دنباله حسابی حداقل به سه جمله نیاز داریم) و حداقل قدرنسبت ۱ است چون قدرنسبت عدد طبیعی است و نمی‌تواند کمتر از یک باشد.

$$n = 3 \rightarrow (3-1)d \leq 30 \rightarrow d \leq 15$$

با توجه به طبیعی بودن d تعداد ۱۵ دنباله با اعضای طبیعی نابیشتر از ۳۱ می‌توان ساخت که جمله اول آن‌ها یک باشد.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۷۹

A و B هر دو نامتناهی هستند، پس اجتماع آن‌ها نامتناهی است، ولی اشتراک، تفاضل و متمم آن‌ها ممکن است متناهی باشند یا نامتناهی؛ بنابراین فقط مورد پ درست است.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۸۰

اگر دنباله $f(1), f(x_2), f(x_3), \dots$ دنباله حسابی باشد، آنگاه:

$$2f(x_2) = f(1) + f(x_3) \rightarrow 2\log_2 x_2 = \log_2 1 + \log_2 x_3 \rightarrow \log_2 x_2^2 = \log_2 x_3 \rightarrow x_2^2 = x_3$$

دنباله $\{1, x_2, x_3, \dots\}$ دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت q است. نسبت شیب‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{f(x_4) - f(x_3)}{x_4 - x_3} = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = \frac{q^3 - q}{q^2 - q} = \frac{q^2 - q}{q(q^2 - q)} = \frac{1}{q} = \frac{1}{2} \rightarrow q = 2$$

$$d = \log_2 x_2 - \log_2 1 = \log_2 q - \log_2 1 = \log_2 2 - 0 = 1$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۸۱

فرض کنید دنباله خطی $a_n = dn + e$ باشد، در این صورت داریم:

$$\begin{cases} b_3 = 3 \\ b_8 = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3d + e = 3 \\ 8d + e = 18 \end{cases} \Rightarrow d = 3, e = -6 \Rightarrow b_n = 3n - 6$$

اگر دنباله درجه دوم به صورت $a_n = an^2 + bn + c$ باشد، آنگاه داریم:

$$\begin{cases} a_3 = -5 \\ a_6 = -3 \\ a_8 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9a + 3b + c = -5 \\ 36a + 6b + c = -3 \\ 64a + 8b + c = 1 \end{cases} \Rightarrow a = 1, b = -5, c = 1 \Rightarrow a_n = n^2 - 5n + 1$$

اکنون دنباله‌های a_n و b_n را مساوی قرار داده تا جملاتی که دو دنباله مساوی‌اند را بیابیم.

$$a_n = b_n \Rightarrow n^2 - 5n + 1 = 3n - 6 \Rightarrow n^2 - 8n + 7 = 0 \Rightarrow n = 1, n = 7$$

پس مجموع شماره جملات برابر $1 + 7 = 8$ است.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۸۲

a, b, c به ترتیب یک دنباله هندسی می‌سازند، پس آن‌ها را به ترتیب a, aq, aq^2 در نظر می‌گیریم.
از طرفی $f(a), f(b), f(c)$ به ترتیب یک دنباله حسابی می‌سازند پس:

$$2f(b) = f(a) + f(c)$$

نقاط a, b, c روی سهمی قرار گرفته‌اند. معادله سهمی که در نقطه‌ای به طول $x = a$ بر محور X مماس است، به صورت

$$f(x) = k(x - a)^2 \text{ در نظر می‌گیریم. پس:}$$

$$f(a) = 0$$

$$f(b) = f(aq) = k(aq - a)^2 = ka^2(q - 1)^2$$

$$f(c) = f(aq^2) = k(aq^2 - a)^2 = ka^2(q^2 - 1)^2$$

با جایگذاری مقادیر $f(a)$ و $f(b)$ و $f(c)$ در رابطه $2f(b) = f(a) + f(c)$ داریم:

$$2ka^2(q - 1)^2 = ka^2(q^2 - 1)^2 + 0$$

$$\xrightarrow[k \neq 0]{a \neq 0} 2(q - 1)^2 = (q^2 - 1)^2 \xrightarrow{q \neq 1} (q + 1)^2 = 2 \rightarrow$$

$$\begin{cases} q + 1 = +\sqrt{2} \rightarrow q = \sqrt{2} - 1 \\ q + 1 = -\sqrt{2} \rightarrow q = -\sqrt{2} - 1 \end{cases}$$

دنباله هندسی تشکیل شده یک دنباله نزولی است، پس $q = \sqrt{2} - 1$ قابل قبول است.(دقت کنید که جملات a, b, c متفاوت هستند، پس $q \neq 1$)

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

گزینه ۲ درست است.

۱۸۳

می‌دانیم:

$$n(B - A) = n(B) - n(A \cap B)$$

از مقایسه این تساوی با $n(B - A) = n(B) - n(A)$ ، نتیجه می‌گیریم:

$$n(A \cap B) = n(A) \Rightarrow A \cap B = A \Rightarrow A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$$

پس:

$$n(A \cup B) = 4n(A) - 2 \xrightarrow{A \cup B = B} n(B) = 4n(A) - 2$$

از طرفی $n(B) - n(A) = ۱۳$ ، از حل دستگاه زیر داریم:

$$\begin{cases} n(B) = 4n(A) - 2 \\ n(B) - n(A) = ۱۳ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} n(A) = ۵ \\ n(B) = ۱۸ \end{cases}$$

در پایان:

$$n(A \cap B) = n(A) = ۵$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

گزینه ۳ درست است.

۱۸۴

چون ab ، ac و bc سه جمله متوالی از دنباله هندسی هستند، داریم:

$$(ac)^2 = (ab)(bc) \Rightarrow a^2c^2 = ab^2c \Rightarrow ac = b^2$$

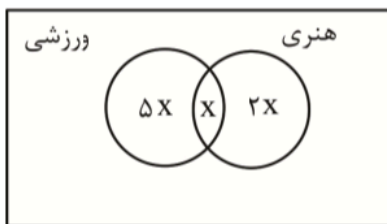
با توجه به تساوی اخیر، پس a و b و c جملات متوالی یک دنباله هندسی هستند. از طرفی a و b و c مطابق صورت سؤال، تشکیل یک دنباله حسابی هم می‌دهند و تنها دنباله‌ای که هم حسابی است و هم هندسی، دنباله ثابت است. پس $a = b = c$ و لذا مثلث مورد نظر، متساوی‌الاضلاع است و محل تلاقی ارتفاع‌ها، میانه‌ها و نیمسازها همگی بر هم منطبق‌اند.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

گزینه ۲ درست است.

۱۸۵

طبق نمودار ون



$$2X + X + 5X = 48 \rightarrow 8X = 48 \rightarrow X = 6$$

$$\text{نفر } ۵X = ۳۰ = \text{تعداد افراد فقط در گروه ورزشی}$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

شش جمله دنباله حسابی ایجادشده را به صورت زیر می نویسیم:

$$a_1 r^2, a_1 r^3, \underbrace{x, y, z}_{\text{سه عدد جدید}}, a_1 r^4$$

می دانیم:

$$\frac{a_1 r^4 - a_1 r^2}{4} = a_1 r^3 - a_1 r^2 = d \rightarrow \frac{\cancel{a_1} r^3 (\cancel{r-1})}{4} = \cancel{a_1} \cancel{r^2} (\cancel{r-1}) \xrightarrow{r \neq 1} r = 4$$

قدرنسبت دنباله هندسی برابر ۴ است.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)